

Photoionisationsgleichgewicht

3. Photoionisationsgleichgewicht

Für jedes Volumenelement $\left\{ \begin{array}{l} \text{Zahl der Photoionisationen pro sec} \\ = \\ \text{Zahl der Rekombinationen pro sec} \end{array} \right.$

Begriffe: Beschreibung des Strahlungsfeldes durch die

- spezifische Intensität:

I_ν = makroskopische Beschreibung des Strahlungsfeldes

$$I_\nu(\nu, \vec{n}, \vec{r}, t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\Delta^4 E}{\Delta\nu \Delta t \Delta\omega \Delta\sigma}$$

= Energie des Strahlungsfeldes

im Frequenzintervall $[\nu, \nu + \Delta\nu]$

" Zeit " $[t, t + \Delta t]$

" Raumwinkel $\Delta\omega$ um \vec{n}

durch das Flächenelement $\Delta\sigma$ (am Ort \vec{r} , \perp auf \vec{n})

Dimension: $\frac{\text{Energie}}{\text{Frequenz} \cdot \text{Zeit} \cdot \text{Raumwinkel} \cdot \text{Fläche}}$

Einheit: $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{Hz} \cdot \text{sterad}}$

übliche Abkürzung: $I_\nu(\vartheta, \phi)$ (Stationarität, Polarkoord.)

- Absorptionsgesetz: $\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu(\vartheta, \phi)$

κ_ν Photoionisationsquerschnitt $[\text{cm}^{-1}]$

- Absorbierte Energie pro cm^3 und sec : $E_{\text{abs},\nu}$

$$\int d\omega : E_{\text{abs},\nu} = \oint \frac{dI_\nu}{ds} d\omega = -\kappa_\nu \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu(\vartheta, \phi) \underbrace{\sin\vartheta d\vartheta d\phi}_{d\omega}$$

- mittlere Intensität \bar{J}_ν

$$\bar{J}_\nu \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \sin\vartheta d\vartheta d\phi$$

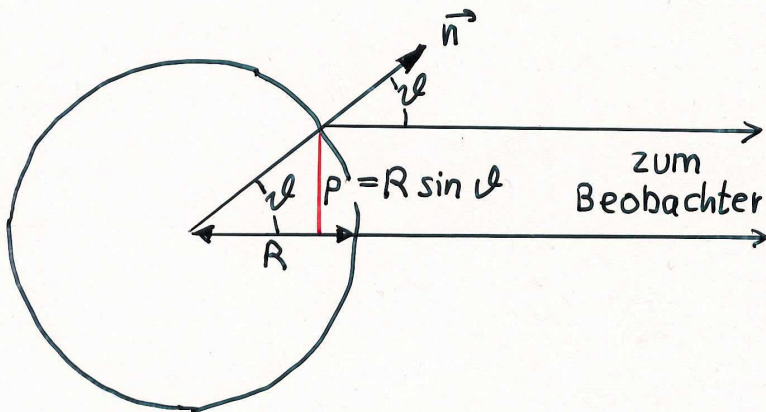
Dimension: $\frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit} \cdot \text{Frequenz}}$ Einheit: $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \cancel{\text{s}} \cdot \cancel{\text{Hz}}}$

damit wird: $E_{\text{abs},\nu} = 4\pi \cdot \kappa_\nu \cdot \bar{J}_\nu$

Dimension: $\frac{\text{Energie}}{\text{Volumen} \cdot \text{Zeit} \cdot \text{Frequenz}}$ Einheit: $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \cancel{\text{s}} \cdot \cancel{\text{Hz}}}$

- Astrophysikalischer Fluß $F_\nu(0)$

- über die Sternscheibe gemittelte Intensität \bar{I}_ν



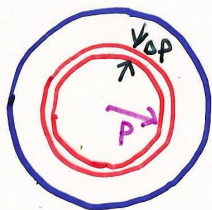
$$p = R \cdot \sin \vartheta \quad |\mu = -\cos \vartheta|$$

$$p^2 = R^2 (1 - \mu^2) \quad \left| \frac{d}{d\mu} \right.$$

$$2p \frac{dp}{d\mu} = -2R^2 \mu$$

$$p dp = -R^2 \mu d\mu$$

Aufsicht "Sternscheibe"



$$\bar{I}_\nu = \int_0^R I_\nu(p) \underbrace{2\pi p dp}_{\text{Kreisring}} / \underbrace{\pi R^2}_{\text{Gesamtfläche}}$$

$$= 2 \int_0^1 I_\nu(\mu) \pi R^2 \mu d\mu / \pi R^2 = 2 \int_0^1 I_\nu(\mu) \mu d\mu$$

def. $F_\nu(0)$

- Leuchtkraft (bei Frequenz ν) :

$$L_\nu := \underbrace{4\pi R_*^2}_{\text{Kugeloberfläche}} \cdot \underbrace{\pi F_\nu(0)}_{\text{(physikal.) Fluß}}$$

- mittlere Intensität im Nebel (am Punkt r), näherungsweise

$$J_\nu = \underbrace{\frac{\pi R_*^2}{4\pi r^2}}_{\text{Fläche der Sternscheibe}} \cdot F_\nu(0) = w_g \cdot F_\nu(0) = \frac{L_\nu}{(4\pi)^2 r^2}$$

(Fläche der Sternscheibe
Fläche d. Kugel mit Radius r)

ohne Absorption und
Reemission im NE

Photoionisationsgleichgewicht

1. Zahl der Photoionisationsprozesse pro sec und cm^3

$$= \frac{\text{absorbierte Energie}}{h\nu}$$

$$\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{E_{\text{abs},\nu}}{h\nu} d\nu \stackrel{(3.2)}{=} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi k_{\nu} j_{\nu}}{h\nu} d\nu$$

ν_0 : Frequenz der Ionisationskante (z. B. Lyman-Kante)

$$k_{\nu} = N_{\text{H}^0} \cdot a_{\nu}(\text{H}) \quad \text{für reinen Wasserstoffnebel}$$

Zahl der Absorber/ cm^3

atomarer Ionisationsquerschnitt, Dimension: cm^2
Einheit: $[\text{cm}^2]$

$$a_{\nu} = a_0 \cdot \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^3 \cdot g_{\nu} \quad \nu \geq \nu_0, \text{sonst} = 0$$

$$7.9 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^2$$

Gauntfaktor (q.m. Korrektur)

2. Zahl der Rekombinationen pro sec und cm^3

$$n_e \cdot n_p \cdot \alpha(\text{H}) \quad \text{reiner H-Nebel}$$

Rekombinationskoeffizient $[\text{cm}^3 \text{s}^{-1}]$

im Gleichgewicht: 1. = 2. :

$$\boxed{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{N_{\text{H}^0} a_{\nu} 4\pi j_{\nu}}{h\nu} d\nu = n_e \cdot n_p \cdot \alpha(\text{H})}$$

näherungsweise: $\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{N_{\text{H}^0} a_{\nu} L_{\nu}}{4\pi r^2 h\nu} d\nu = n_e n_p \alpha(\text{H}) \quad (*)$

(s. 3.3, $j_{\nu} = \dots$)

Photoionisationsquerschnitte : Grundzustände von

H, He I, He II

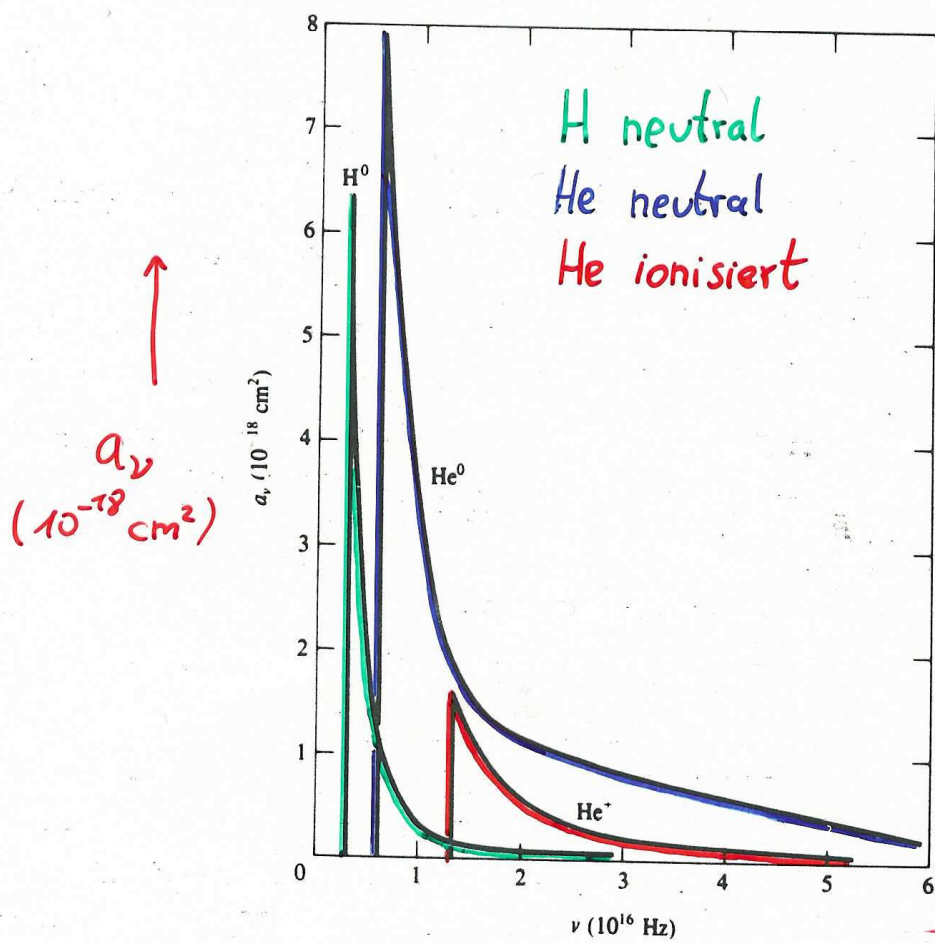


FIGURE 2.2
Photoionization absorption cross sections of H^0 , He^0 , and He^+ .

$$a_\nu \sim \frac{1}{\nu^3}$$

Abschätzung wichtiger Größen und Zeitskalen

Beispiel: H II - Region

$$T_{\text{eff}}^* = 40000 \text{ K}$$

$$r = 5 \text{ pc } (\approx 15 \cdot 10^{18} \text{ cm})$$

$$n_{\text{H}} = 10 \text{ cm}^{-3}$$

① Photoionisationszeitskala

Zahl der Photoionisationen pro Atom und sec.: (linke Seite von geteilt durch N_{H^0})

$$\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{a_{\nu} L_{\nu}}{4\pi r^2 h\nu} d\nu \approx \frac{a_0}{4\pi r^2} \frac{L_0}{h\nu_0} = \frac{6.3 \cdot 10^{-18}}{2.8 \cdot 10^{39}} 5 \cdot 10^{48} \text{ s}^{-1}$$

$$\approx 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

\Rightarrow Atom muß 10^8 s w
auf Photoionisation

② Ionisationsgrad

rechte Seite von (*)

$$\alpha(\text{H}) = 4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$z := N_{\text{H}^0} / N_{\text{H}}$$

$$1 - z = \text{Ionisationsgrad}$$

$$n_e = n_p = (1 - z) N_{\text{H}}$$

$$\text{Gl. (*): } z \cdot N_{\text{H}} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{a_{\nu} L_{\nu}}{4\pi r^2 h\nu} d\nu}_{10^{-8}} = (1 - z)^2 N_{\text{H}}^2 \underbrace{\alpha(\text{H})}_{4 \cdot 10^{-13}}$$

$$z \cdot N_{\text{H}} \cdot 10^{-8} = (1 - z)^2 N_{\text{H}}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-13}$$

$$z \ll 1 : z = \frac{N_{\text{H}}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-13}}{N_{\text{H}} \cdot 10^{-8}} = 4 \cdot 10^{-5} N_{\text{H}}$$

$$z = 4 \cdot 10^{-4}$$

\rightarrow fast vollständig ionisiert

③ Dicke der Übergangsschicht ionisiert \leftrightarrow neutral

$$z = 0.5$$

mittlere freie Weglänge eines ionisierenden Photons:

$$d = \frac{1}{N_{H^0} \cdot a_{\nu}} = \frac{1}{z N_H \cdot a_{\nu}} = \frac{1}{0.5 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 10^{-18}} \quad \text{cm}$$

$$1 \text{ pc} = 3.084 \cdot 10^{18} \text{ cm}$$

$$= \frac{1}{30 \cdot 10^{-18} \cdot 3 \cdot 10^{18}} \quad \text{pc}$$

$$= \frac{1}{100} \text{ pc}$$

Dicke \ll Durchmesser der ionisierten Kugel

\Rightarrow scharf begrenzter Rand

Strömgren - Sphäre

$R_{st} = \text{Strömgren-Ra}$

Nebel ist ionisationsbegrenzt $R_{st} < R_M$

($R_M = \text{Radius der Materiewolke}$)

Nebel ist dichtebegrenzt $R_{st} > R_M$

④ Zeitskalen für Abregung im H-Atom

Photoionisation und Rekombination von H

Termschema des Wasserstoffs s.S. 1.13

Dublett-System

erlaubte Übergänge zum Grundzustand vom 2. Niveau aus:

$$\text{nur } 2p \ ^2P^{\circ} - 1s \ ^2S$$

$$2s \ ^2S - 1s \ ^2S \quad \text{verboten (Paritätsregel!)}$$

In dichten Plasmen: Stoßübergänge $2s \ ^2S - 2p \ ^2P^{\circ}$

In Gasnebeln: 2-Photonenübergang $2s \ ^2S - 1s \ ^2S$

über ein virtuelles Niveau (" $\frac{3}{2}P \ ^2P^{\circ}$ ")

$$\bar{\lambda}_{2ph} = 2 \lambda_{Ly\alpha} = 2430 \text{ \AA}$$

Keine scharfen Linien, sondern Kontinuum mit

Maximum bei $\lambda = 2 \lambda_{Ly\alpha}$ (Photonenverteilung; aber: Max. der Energieverteilung bei 1620 \AA wg. Skalierung mit $h\nu$)

Übergangswahrscheinlichkeit

$$A_{2ph} = 8.23 \text{ s}^{-1} \quad (\hat{=} \tau_{2ph} = 0.12 \text{ s})$$

$\ll 10^8 \text{ s}$ für Photoionisation

τ_{2ph} ist die größte Lebensdauer in der Rekombinationskaskade von H

→ Nebelapproximation:

Ionisation erfolgt vom Grundzustand aus
Rekombination führt in alle Niveaus

⑤ Departure Koeffizient des HI-Grundzustandes

Photoionisationsgleichgewicht liefert Besetzungsdichte des Grundzustandes:

$$N_{H^0} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{a_{\nu} L_{\nu}}{4\pi r^2 h\nu} d\nu = n_e \cdot n_p \cdot \alpha(H) \quad \text{s.S. 3.4}$$

Bestimmung von b_1 :

$N_{H^0} \approx N_1$ (wg. Überbesetzung des Grundzustands)

$$N_1 = b_1 \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{X_n / k T} \cdot n_p \cdot n_e \quad \text{s.S. 2.3}$$

$\rightarrow h\nu_0 - X_n^0 = h\nu_0$

$$\rightarrow b_1 \cdot \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{X_n / k T} n_p n_e \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{a_{\nu} L_{\nu}}{4\pi r^2 h\nu} d\nu = n_e n_p \alpha(H)$$

$$b_1 = \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-X_n / k T} \alpha(H) / \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{a_{\nu} L_{\nu}}{h\nu 4\pi r^2} d\nu$$

Beispiel (wie S. 3.5): HII - Region

$$T_{\text{eff}}^* = 40000 \text{ K}, \quad r = 5 \text{ pc}, \quad n_H = 10 \text{ cm}^{-3}$$

$$T = 10000 \text{ K}$$

$$\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{a_{\nu} L_{\nu}}{4\pi r^2 h\nu} d\nu = \frac{a_0}{4\pi r^2} \frac{L_0}{h\nu_0} \approx 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha(H) = 4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{b_1 \approx 10^{10}}$$

Skala für Elektron-Elektron-Stöße
und die Einstellung der Gleichgewichtsverteilung
(Maxwell)

Elektronen werden freigesetzt mit $E \sim \int r_a - E_{\text{ion}}$
also abhängig vom Strahlungsfeld des Zentralsterns.
(\rightarrow nicht-thermische Energieverteilung)
Stöße zwischen Elektronen (elastische Streuung):
Abschätzung: Reichweite der Coulombwechselwirkung

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{r_c} \rightarrow r_c = \frac{2e^2}{mv^2}$$

Querschnitt: $q = \pi r_c^2 = 4\pi \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \approx 10^{-13} \text{ cm}^2$

Stoßfrequenz: $\frac{1}{\tau} = v \cdot q \cdot n_e = \underbrace{\left(\frac{2kT}{m_e}\right)^{1/2}}_{5 \cdot 10^7 \text{ cm/s}} \cdot \underbrace{q \cdot n_e}_{10^4 \text{ cm}^{-3}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

> ein Elektron erleidet im Mittel rund alle

$\tau = 20 \text{ s}$ einen Stoß

$\ll \tau_{\text{Photoionisation}} (\approx 10^8 \text{ s})$

Gleichgewichtsverteilung

Maxwellverteilung

) Rekombinationszeitskala

Der totale Rekombinationskoeffizient (Wasserstoff)

$$\alpha_A := \sum_{n,l} \alpha_{nl}(H^0, T) = \sum_n \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{nl}(H^0, T)$$
$$=: \sum_n \alpha_n(H^0, T)$$

$$T = 10^4 \text{ K} : \quad \alpha_A(H^0) = 4.18 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Rekombinationszeitskala} : \quad \tau_R = \frac{1}{n_e \alpha_A} \approx \frac{2 \cdot 10^{12}}{n_e} \text{ sec}$$
$$\approx 10^5 / n_e \text{ Jahre}$$

$$n_e = 10^4 \text{ cm}^{-3} : \quad \tau_R \approx 2 \cdot 10^8 \text{ s}$$

Photoionisation eines reinen Wasserstoffnebels

$$N_{H^0} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi j_{\nu} k_{\nu}}{h\nu} d\nu = n_p n_e \alpha_A(T)$$

Strahlungstransport (mit Absorption und Reemission):

$$dI_{\nu} = \underbrace{-\kappa_{\nu} I_{\nu} ds}_{\text{Absorption}} + \underbrace{\epsilon_{\nu} ds}_{\text{Reemission}} \quad (\nu \geq \nu_0)$$

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = -N_{H^0} a_{\nu} I_{\nu} + \epsilon_{\nu}$$

↑

lokaler Emissionskoeffizient

Einheit: $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$

Strahlungsfeld zerlegbar: stellarer Anteil I_ν^s

"diffuser" Anteil I_ν^d

$$I_\nu = I_\nu^s + I_\nu^d$$

- stellares Strahlungsfeld: $J_\nu^s = w_g \cdot F_\nu(0) \cdot e^{-\tau_\nu(r)}$
geom. Verdünnung Absorption im Nebel

$$\tau_\nu := \text{optische Dicke} = \int_0^r \underbrace{N_H^0 a_\nu}_{k_\nu} dr'$$

$$J_\nu^s = \frac{\pi F_\nu(0) R_*^2}{4\pi r^2} e^{-\tau_\nu}$$

- diffuse Strahlung $\frac{dI_\nu^d}{ds} = -N_H^0 a_\nu I_\nu^d + \epsilon_\nu$

ϵ_ν ? { Zahl der Rekombinationsprozesse nach $1s^2S_0^*$ die zur Emission im Intervall $[\nu, \nu+d\nu]$ führen }

$$\text{mal } \frac{h\nu}{4\pi}$$

* nur diese sind von Belang. Die Lyman-Photonen können Photoionisationen "machen"!

$$\rightarrow \epsilon_\nu d\nu = n_e n_p \nu \sigma_{1s} f(\nu) d\nu \cdot \frac{h\nu}{4\pi}$$

woher $\sigma_{1s}(\nu)$?

Milne-Relation: $\sigma(\nu)$ durch a_ν ausdrücken

Schub: Milne-Relation (s. Sternatmosphären-Vorlesung)

TE gilt für jeden Einzelprozess:

$$\text{Rekombinationsrate} = \underbrace{(1 - e^{-h\nu/kT})}_{\text{induzierte Rekombination}} \cdot \text{Photoionisationsrate}$$

$$mv^2 + h\nu_0 = h\nu \quad \rightarrow \quad mv dv = h d\nu$$

$$\text{Kombinationsrate: } n_p n_e v \sigma(v) f(v) dv$$

$$\text{Photoionisationsrate: } N_{H^0} \frac{4\pi B_\nu(T)}{h\nu} a_\nu dv$$

($\hat{=}$ linke Seite d. Gl. 3.4
für Photoionisationsgleichgewicht, mit $J_\nu = B_\nu$)

$$\rightarrow n_p n_e v \sigma(v) f(v) dv = (1 - e^{-h\nu/kT}) N_{H^0} \frac{4\pi B_\nu(T)}{h\nu} a_\nu dv$$

setzen: a) Maxwellverteilung $f(v)$

b) Planckfunktion $B_\nu(T)$

c) Saha-Gleichung $n_p n_e / N_{H^0} = F(T)$

$$\sigma(v) = \frac{g_p}{g_{H^0}} \frac{h^2 v^2}{m^2 c^2 v^2} a_\nu$$

hängt nur von Atomkonstanten ab \Rightarrow gilt immer,
also auch im non-L

s. analoge Diskussion zur Ableitung der Einstein-Koeffizienten

Einsetzen der Milne-Relation, Maxwellverteilung:

$$\epsilon_\nu d\nu = n_e n_p v \sigma(v) f(v) d\nu \quad h\nu/4\pi$$

$$= n_e n_p v \frac{h\nu^2}{2m^2 c^2 v^2} a_\nu \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k}\right)^{3/2} T^{-3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} d\nu \quad \frac{h}{4}$$

$$mv \, dv = h \, d\nu \quad e^{-mv^2/2kT} = e^{-h(\nu-\nu_0)/kT}$$

$$\epsilon_\nu d\nu = n_e n_p \frac{h^3 \nu^3}{2m^3 c^2} a_\nu \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k}\right)^{3/2} T^{-3/2} e^{-h(\nu-\nu_0)/kT} d\nu$$

$$\epsilon_\nu = \frac{2h^3 \nu^3}{m^{3/2} c^2 2^{3/2} k^{3/2} \sqrt{\pi}} T^{-3/2} e^{-h(\nu-\nu_0)/kT} a_\nu n_e n_p$$

(allgemeiner Fall: mit ϵ_ν Strahlungstransport lösen)

Gesamtzahl ionisierender Photonen, die ^{durch Rekombination} zum Grundniveau entstehen:

$$4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\epsilon_\nu}{h\nu} d\nu = n_p n_e \alpha_1(H^0, T)$$

Rekombinationskoeffizient zum Grundzustand

Grenzfälle, ohne Strahlungstransport lösbar:

Fall A

optisch dünner Nebel: $\int_{\nu}^d \approx 0$

Fall B

optisch dicker Nebel:

Keine ionisierende Strahlung kann den Nebel verlassen. Auch alle "diffusen" Photonen bleiben im Nebel stecken.

Fall B trifft auf die meisten Nebel zu

$$N_{H^0} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi J_{\nu}^s a_{\nu}}{h\nu} d\nu = n_e n_p (\alpha_A - \alpha_1)$$

$$= n_e n_p \alpha_B \quad \alpha_B := \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(H^0, T)$$

d.h.: Ionisation durch Sternphotonen wird bilanziert durch Rekombinationen zu angeregten Niveaus.
 Rekombination ins Grundniveau hat keinen Nettoeff

Einsetzen von J_{ν}^s s.S. 3.11 (folgendes gilt analog für FALL A)

$$N_{H^0} \frac{R^2}{r^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\pi F_{\nu}(R)}{h\nu} e^{-\tau_{\nu}} a_{\nu} d\nu = n_e n_p \alpha_B \quad (I)$$

$$\tau_{\nu} = \int_R^r N_{H^0}(r') a_{\nu} dr' \quad (II)$$

$$\tau_{\nu}(r) = \tau_0(r) a_{\nu}/a_0$$

def. → opt. Tiefe an Lyman-Kante

gegeben: $N_H(r), T(r), F_{\nu}(R)$ ← Modellatmosphären

$$N_H = N_{H^0} + n_p = N_{H^0} + n_e, \text{ da } n_e = n_p$$

$$(I) \quad \frac{N_{H^0}(r)}{r^2} f(\tau_0(r)) = [N_H(r) - N_{H^0}(r)]^2 \alpha_B(T(r))$$

$$(II) \quad \frac{d}{dr} \tau_0(r) = N_{H^0}(r) a_0$$

gesucht: $\tau_0(r), N_{H^0}(r)$

Einsetzen (II) in (I):

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{a_0} \left(\frac{d}{dr} \tau_0(r) \right) f(\tau_0(r)) = \left[N_H(r) - \frac{1}{a_0} \frac{d}{dr} \tau_0(r) \right]^2 \alpha_B(T(r))$$

Differentialgleichung für $\tau_0(r)$, 1. Ordnung, nichtlinear

Anfangsbedingung $\tau_0(R) = 0$

$$\left(\frac{d\tau_0}{dr}\right)^2 - \frac{d\tau_0}{dr} \left[2 N_H(r) a_0 + \frac{a_0}{\alpha_B r^2} f(\tau_0(r)) \right] + a_0^2 N_H^2(r) = 0$$

Dgl. vom Typ: $y'^2 - y' [f_1(x) + f_2(x)g(y)] + f_3(x) = 0$

→ numerisch lösen

→ $\tau_0(r)$

$N_{H0}(r)$ ergibt sich aus (II)

Strömgrenradius: r_{st}

Näherungsformel: (I) über r integrieren:

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_0^\infty N_{H0}(r) R^2 \int_{\nu_0}^\infty \frac{\pi F_\nu(R)}{h\nu} a_\nu e^{-\tau_\nu} d\nu dr &= \int_0^\infty r^2 n_p n_e \alpha_B dr \\ \int_{\nu_0}^\infty R^2 \frac{\pi F_\nu(R)}{h\nu} \left(\int_0^\infty \frac{d\tau_\nu}{dr} e^{-\tau_\nu} dr \right) d\nu &= \quad \quad \quad \text{weil } \frac{d(-e^{-\tau_\nu})}{dr} = e^{-\tau_\nu} \frac{d\tau_\nu}{dr} \\ &= \int_0^\infty d(e^{-\tau_\nu}) = [e^{-\tau_\nu}]_0^\infty = 1 \end{aligned}$$

Vereinfachung: $r < r_{st}$: $n_e = n_p = n_H$ (vollst. ionisiert)
 $r > r_{st}$: $n_e = 0$ (neutral)

$$R^2 \int_{\nu_0}^\infty \frac{\pi F_\nu(R)}{h\nu} d\nu = N_H^2 \alpha_B \int_0^{r_{st}} r^2 dr$$

↳ falls $T = \text{const}$

$$R^2 \int_{\nu_0}^\infty \frac{\pi F_\nu(R)}{h\nu} d\nu = N_H^2 \alpha_B \frac{1}{3} r_{st}^3$$

Näherungsformel für Strömgrenradius r_{st}

physikalische Bedeutung:

$$\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{L_{\nu}}{h\nu} d\nu = N_H^2 \alpha_B V_{St} \quad V_{St} = \text{Strömungsvolumen}$$

Zahl der ionisierenden Strahlung photons pro sec.

Zahl der Rekombinationen pro sec innerhalb des ionisierten Volumens (nur angeregte Niveaus relevant)

Helium im Nebel

Photoionisationsgleichgewicht für H+He-Plasma

- Ionisationspotentiale:
- H° : 13.6 eV
 - He° : 24.6 eV
 - He^{+} : 54.4 eV

- $13.6 \text{ eV} \leq h\nu \leq 24.6 \text{ eV}$: nur H° ionisierbar
- $h\nu \geq 24.6 \text{ eV}$: H° und He° ionisierbar
- $h\nu \geq 54.4 \text{ eV}$: $H^{\circ}, He^{\circ}, He^{+}$ "

→ Ionisationsgleichungen für He und H sind durch das Strahlungsfeld mit $h\nu > 24.6 \text{ eV}$ verknüpft.

Komplikationen:

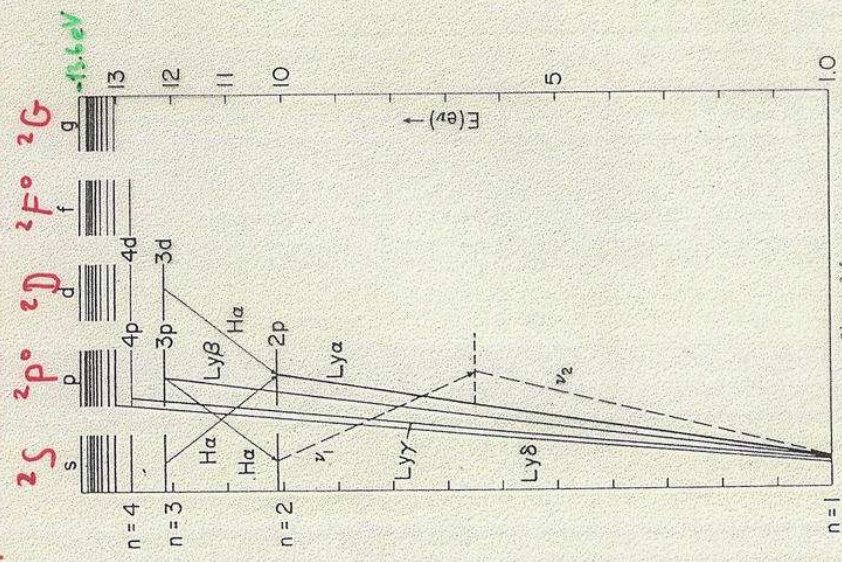
- Rekombination von He^{+} ^{nach He°} liefert Photonen, die H ionisieren.
 3/4 im Triplettssystem, 1/4 im Singlettsystem

a) Triplettssystem: Kaskaden enden auf metastabilem Niveau 2^3S . Interkombinationslinie (19.8 eV - Photon), oder Stoßübergang (Anregung) $2^3S \rightarrow 2^1S, 2^1P$

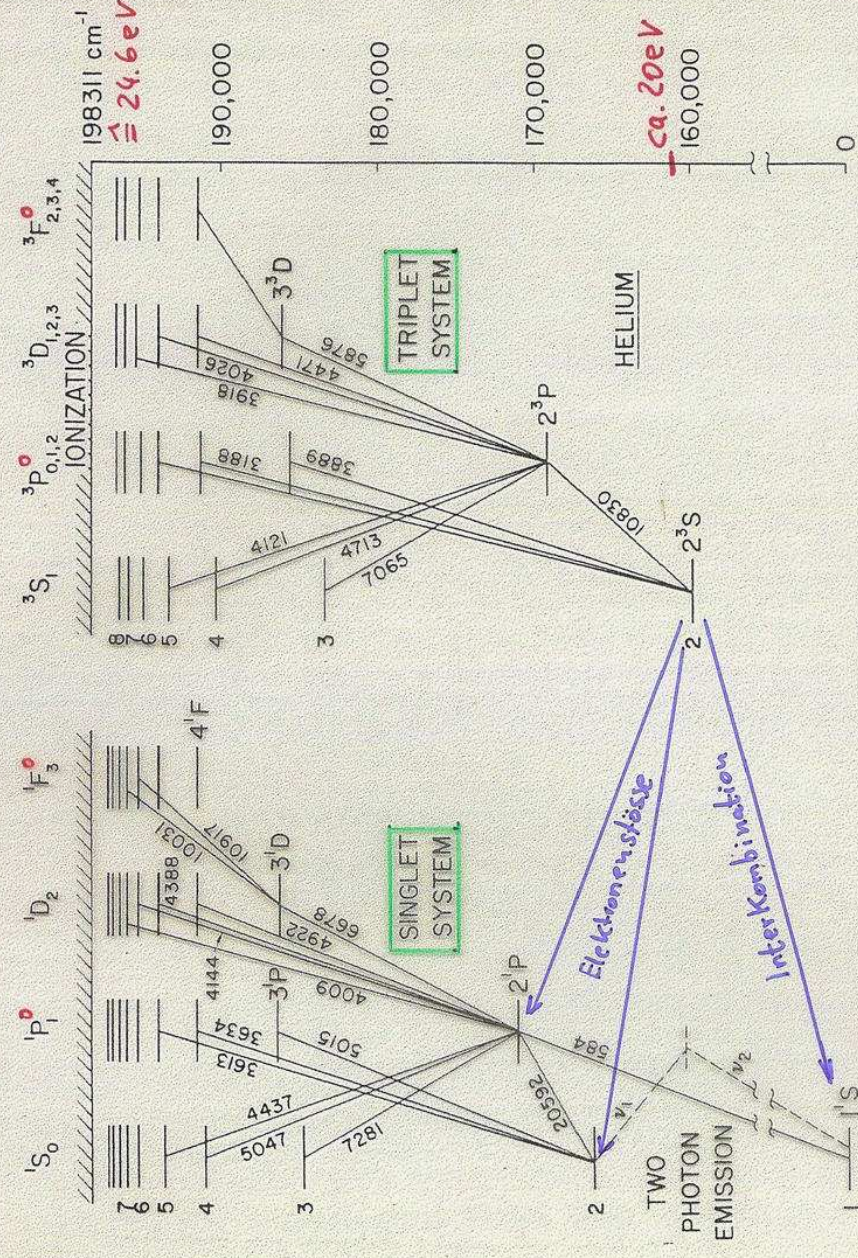
b) Singlettsystem: $\sim 2/3$ 2^1P $\sim 1/3$ 2^1S (Besetzung nach Rekombination)
 \downarrow 1^1S (21.2 eV) \downarrow 1^1S (2-Photonen-Übergang)

TERMSCHEMATA

Wasserstoff



Helium



Wellenlängen in Å

Figure 2-5

Nur H, He^0, He^+ (Kein He^{++}) o.k. in HII-Regionen, aber nicht in PN mit sehr heißen Zentralsternen

$$y := N_{H^0} a_{\nu_2}(H^0) / (N_{H^0} a_{\nu_2}(H^0) + N_{He^0} a_{\nu_2}(He^0))$$

Bruchteil der Photonen mit $h\nu_2 > 24.6 \text{ eV}$, die von H absorbiert werden

Ionisationsgleichungen ("on the spot" - Approximation) s. Gl. I auf S. 3.15

A: H)
$$N_{H^0} \frac{R^2}{r^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\pi F_{\nu}(R)}{h\nu} a_{\nu}(H^0) e^{-\tau_{\nu}} d\nu + y N_{He^+} n_e \alpha_1^{\downarrow}(He^+, T)$$

Sternphotonen He⁺-Rekombinationsphotonen,
die H ionisieren, $h\nu > 24.6 \text{ eV}$ (!)

$$+ p \cdot N_{He^+} n_e \alpha_B^{\downarrow}(He^+, T) = n_p n_e \alpha_B(H^0, T)$$

Verlustfaktor, 2 Photonkont. He⁺ Rekombinationsphotonen $13.6 \text{ eV} < h\nu < 24.6 \text{ eV}$ (!)

B: He)
$$N_{He^0} \frac{R^2}{r^2} \int_{\nu_2}^{\infty} \frac{\pi F_{\nu}(R)}{h\nu} a_{\nu}(He^0) e^{-\tau_{\nu}} d\nu + (1-y) N_{He^+} n_e \alpha_1(He^+, T)$$

He⁺-Rekombinationsphotonen, die He⁰ ionisieren, $h\nu > 24.6 \text{ eV}$

$$= n_e N_{He^+} \alpha_A(He^+, T)$$

C: optische Dicke
$$\frac{d\tau_{\nu}}{dr} = N_{H^0} a_{\nu}(H^0)$$

$13.6 < \nu < 24.6$

bzw.
$$= N_{H^0} a_{\nu}(H^0) + N_{He^0} a_{\nu}(He^0) \quad \nu \geq \nu_2$$

D: Ladungserhaltung
$$n_e = n_p + N_{He^+}$$

Lösung: numerische Integration

Abschätzung: Radius der He⁺- Strömngrenzhöhre

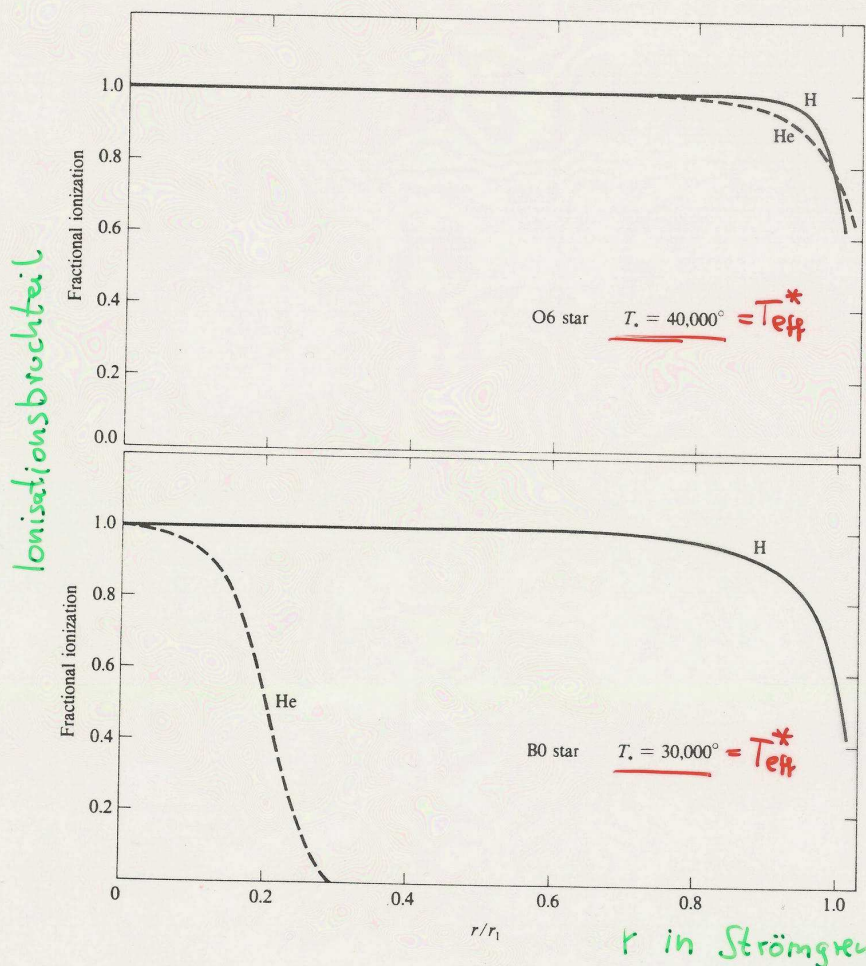
vernachlässigen: Kopplung mit H in He⁺-Sphäre (d.h. $y=0$ auf voriger Seite, oben) u. $N_{H^0}=0$ in τ -Skala)

$$\underbrace{\int_{1/2}^{\infty} \frac{L_{\nu}}{h\nu} d\nu}_{Q(\text{He}^0)} = \frac{4\pi}{3} r_{\text{He}}^3 N_{\text{He}^+} \cdot n_e \alpha_B(\text{He}^0)$$

(analog zu S. 3.17)

$$\Rightarrow r_{\text{He}}^3 = Q(\text{He}^0) / N_{\text{He}^+}^{(2)} \cdot n_e^{(2)} \alpha_B(\text{He}^0)$$

$$r_{\text{H}}^3 = Q(\text{H}^0) / N_{\text{H}^+}^{(1)} \cdot n_e^{(1)} \alpha_B(\text{H}^0)$$



Beispiele:
 $N_{\text{H}} = 10 \text{ cm}^{-3}$
 $N_{\text{He}}/N_{\text{H}} = 0.15$

Ionisationsbruchteil

T_* Kühler
 → weniger harte Photonen ($\nu > 24.6 \text{ eV}$)
 → He-Ionisation bricht zusammen

r in Strömngrensradien (von H) →

FIGURE 2.4 Ionization structure of two homogeneous H + He model H II regions.

Photoionisation von He^+ zu He^{++}

(nur in einigen PN)

H^0 und He^{++} gut separabel:

alle He^{++} -Rekombinationsprozesse ionisieren H:

He II - Lyman - Kontinuumsphotonen } direkte Rekombination
 " Balmer - " } in $n=1,2$

He II - Ly α , 2 Photonen-Kont.

He^{++} - Rekombinationsphotonen ausreichend, um

H-Ionisation aufrechtzuerhalten (bei normaler He-Häufigkeit)

\Rightarrow He^{++} Strömungssphäre: nur stellare Photonen mit $h\nu > 54 \text{ eV}$ (von He II) absorbiert.

Photoionisation schwerer Elemente

z.B. C, N, O, Ne, Si, Fe

Elementhäufigkeiten: $10^{-3} \dots 10^{-4}$ (nach Teilchenzahl)

\rightarrow Keine Rückwirkung auf H, He - Ionisation

$$N(x^i) \int_{\nu_i}^{\infty} \frac{4\pi J_\nu}{h\nu} a_\nu(x^i) d\nu = N(x^{i+1}) n_e \alpha_G(x^i, T)$$

verallgemeinerte Ionisationsgleichung für Element X

im Ionisationszustand i .

+ Teilchenzahlerhaltung $N(x^0) + N(x^1) + \dots + N(x^n) = N(x)$

Calculated radii of Strömgen spheres

Wasserstoff

Spectral type	M_v	$T_*(^{\circ}K)$	$\text{Log } Q(H^0)$ (photons/sec)	$\text{Log } N_e N_p r_1^3$ (N in cm^{-3} ; r_1 in pc)	r_1 (pc) ($N_e = N_p$ $= 1 \text{ cm}^{-3}$)
O5	- 5.6	48,000	49.67	6.07	108
O6	- 5.5	40,000	49.23	5.63	74
O7	- 5.4	35,000	48.84	5.24	56
O8	- 5.2	33,500	48.60	5.00	51
O9	- 4.8	32,000	48.24	4.64	34
O9.5	- 4.6	31,000	47.95	4.35	29
B0	- 4.4	30,000	47.67	4.07	23
B0.5	- 4.2	26,200	46.83	3.23	12

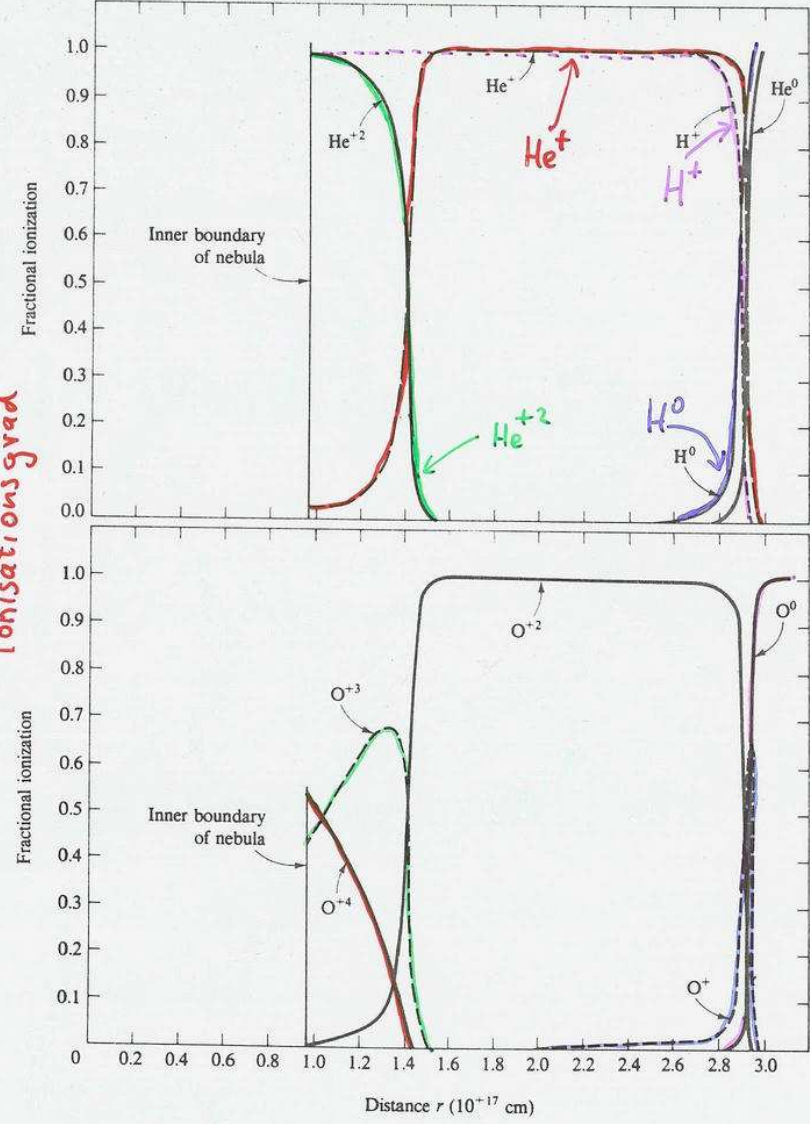
NOTE: $T = 7500^{\circ} \text{K}$ assumed for calculating α_B .


 T_{eff}

H, He

Ionisationsgrad

O



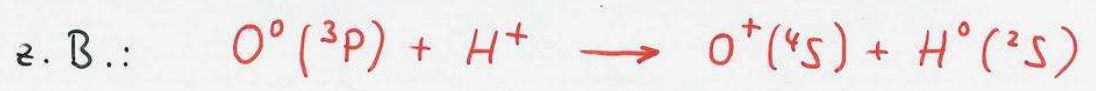
Beispiel:
 T* = 10⁵ K
 (blackbody)

cf. 21a,b →

FIGURE 2.6 Ionization structure of H, He (top), and O (bottom) for a model planetary nebula.

Ladungsaustausch - Reaktionen

zusätzlicher Ionisationseffekt; Polarisationskraft



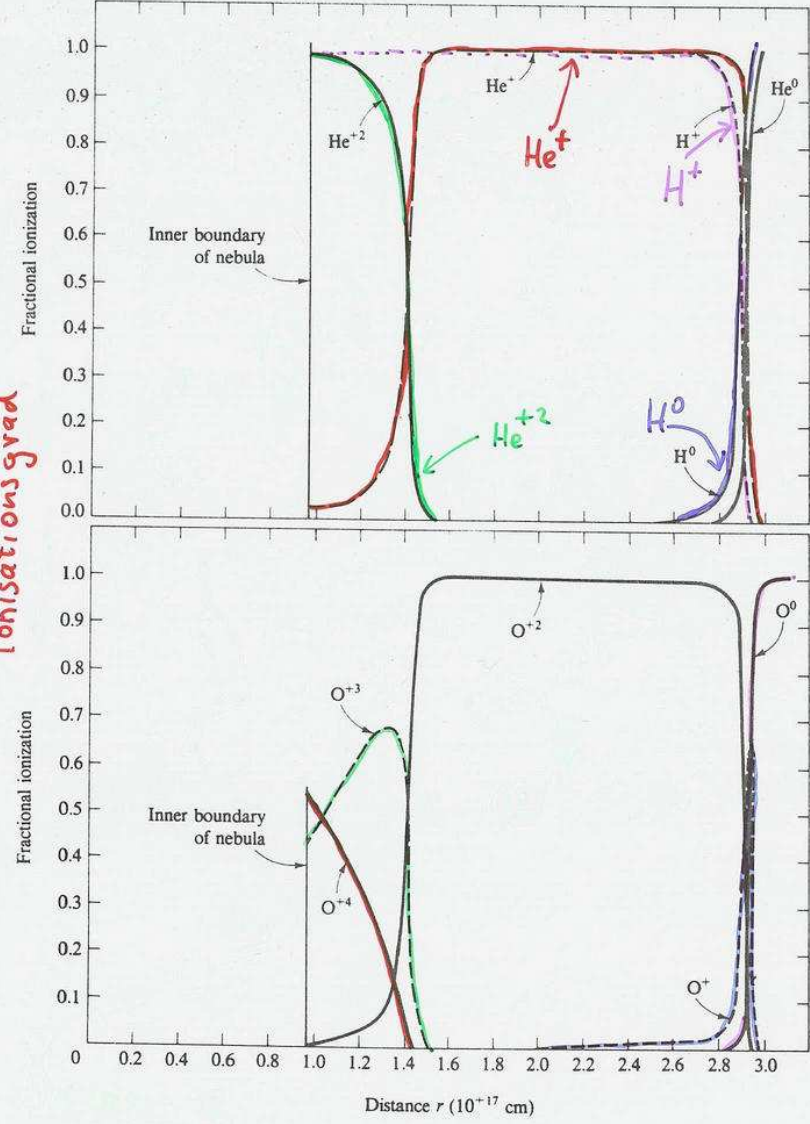
positiv geladenes H⁺ polarisiert O⁰-Elektronenwolke

Ladungsaustausch effektiv, wenn Ionisationspotentiale

- ähnlich groß: z. B.:
- H⁰ 13.6 eV
 - O⁰ 13.62 eV
 - N⁰ 14.5 eV

H, He

Ionisationsgrad



Beispiel:
T* = 10⁵ K
(blackbody)

O

cf. 21a, b →

FIGURE 2.6 Ionization structure of H, He (top), and O (bottom) for a model planetary nebula.

Ladungsaustausch - Reaktionen

zusätzlicher Ionisationseffekt; Polarisationskraft



positiv geladenes H⁺ polarisiert O⁰-Elektronenwolke

Ladungsaustausch effektiv, wenn Ionisationspotentiale

ähnlich groß: z. B.:

H ⁰	13.6 eV
O ⁰	13.62 eV
N ⁰	14.5 eV

Reaktionsrate pro cm^3 und sec :

$$N_0 \cdot N_p \cdot \delta(T)$$

↖ neutr. Sauerstoff ↗ Protoneⁿ

der Ratenkoeffizient $\delta(T)$ kann - in Analogie zum Rekombinationskoeffizienten $\alpha(T)$ durch den Reaktionsquerschnitt $\sigma(v)$ ausgedrückt werden:

$$\delta(T) = \int_0^{\infty} v \sigma(v) f(v) dv$$

Größenordnung von δ : $10^{-9} \text{ cm}^3/\text{sec}$

$f(v)$: Maxwell-Boltzmann-Verteilung für die Relativgeschwindigkeit v im OH^+ -Massenzentrum (\rightarrow reduzierte Masse)

Den Ratenkoeffizienten δ' für den Umkehrprozeß

$$N_0 + N_{\text{H}^0} \delta'(T)$$

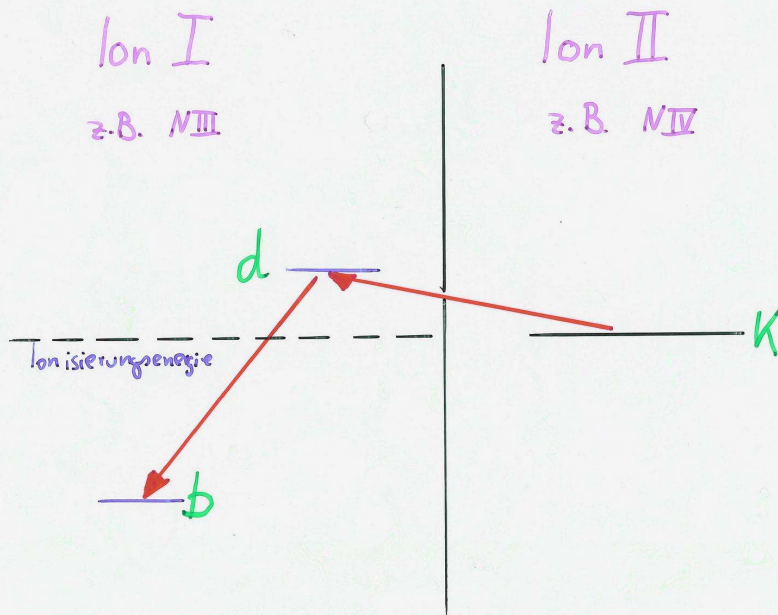
bekommt man aus δ über eine integrale Form der Milne-Relation:

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{q}{8} e^{-\Delta E / kT}$$

wobei $\Delta E = 0,02 \text{ eV}$ die Differenz der Ionisationspotentiale von O^0, H^0 ist.

Beispiel: bei $N_p = 10 \text{ cm}^{-3}$ ist die Ionisationsrate pro O-Atom pro sec. ca. 10^{-8} s^{-1} , also vergleichbar mit der Photoionisationsrate! Wegen der geringen O-Häufigkeit wird jedoch nicht das H-Ionisationsgleichgewicht beeinflusst.

Dielektronische Rekombination



"b" (bound state) gebundener Zustand

"d" (doubly excited state) doppelt angeregter Zustand (d.h. 2 e^- angeregt)

Kann über Ionisationsgrenze liegen: **Autoionisationsniveau**

"K" Grundzustand des Ions II

Prozeß $K \rightarrow d \rightarrow b$: **dielektronische Rekombination**

$K \rightarrow d$: Ion II fängt freies e^- ein; ein doppelt angeregter Zustand in Ion I entsteht. Strahlungsloser Übergang, d.h. das e^- muß die „passende“ Energie haben („Resonanzeinfang“).

Umkehrprozeß $d \rightarrow K$ heißt **Autoionisation** oder **Auger-Effekt**

$d \rightarrow b$: eines der e^- regt sich ab, einfach angeregter, stabiler Zustand entsteht („**stabilisierender Übergang**“, sehr breite Linie, da Lebensdauer klein).

Danach kann das 2. e^- abregen \rightarrow Emissionslinie

Man unterscheidet zwischen

- a) high temperature dielectronic recombination **HTDR**
 b) low " " " " **LTDR**

je nachdem, ob die Autoionisationsniveaus

a) weit über dem Ionisationslimit liegen

(dann braucht man energiereiche „heiße“ Elektronen)

b) nahe am Ionisationslimit liegen.

a) ist wichtigster Rekombinationsprozeß **HeII** → **HeI** in der Sonnen-Korona ($T \approx 2 \cdot 10^6 \text{ K}$). Über 100 mal häufiger als „normale“ Rekombinationen

b) ist wichtig für einige Ionen in Sternatmosphären und Nebeln ($10^4 - 10^5 \text{ K}$).

z.B. **NIII** : Linie $\lambda 4634 - 40 \text{ \AA}$ in Emission in vielen O-Sternen

Grund: oberes Niveau überbevölkert, weil auf diesem ein stabilisierender Übergang endet

siehe Abb. ^{3.25} →

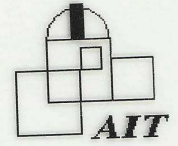
In Nebeln ist der Umkehrprozeß (Autoionisation) unwichtig : es findet keine Anregung in doppeltangeregte Niveaus statt (weder radiativ noch durch Stöße).

In die Berechnung (q.mech.) des Rekombinationskoeffizienten ($\propto n_e \cdot n_{\text{ion}}$) geht neben T die Lebensdauer des Niveaus d ein.

Institut für Astronomie und Astrophysik

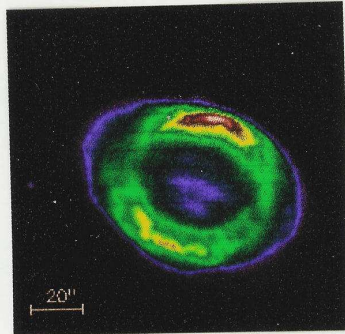
Abteilung Astronomie

Waldhäuser Str. 64, D-72076 Tübingen, Germany

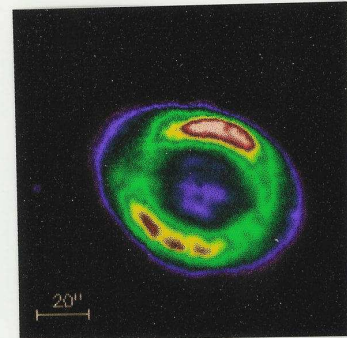


Images of the Planetary Nebula NGC 6720

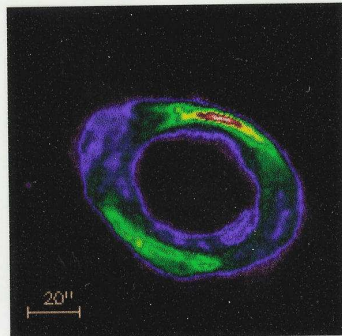
$T_{\text{eff}} = 140\,000\text{ K}$



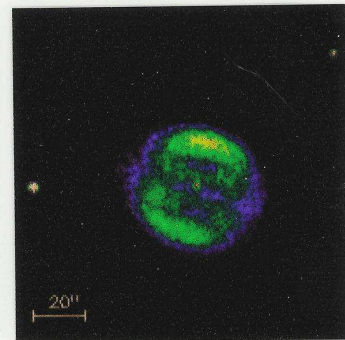
H alpha



O III



N II

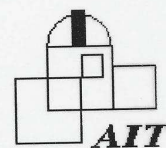
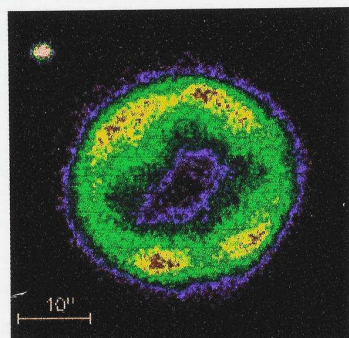


He II

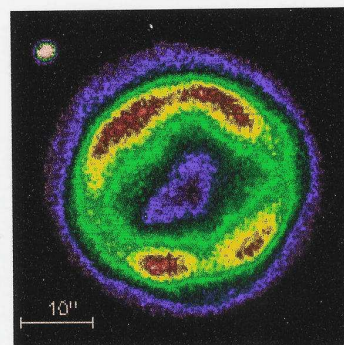
[\[Home Page\]](#) [\[Planetary Nebulae\]](#) [\[Quick Reference\]](#) [\[Feedback\]](#)

Fabian Rother (rother@astro.uni-tuebingen.de)
Last updated 28-Oct-1997

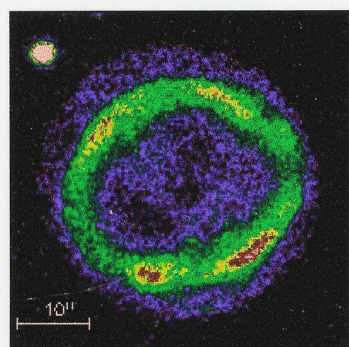


**Images of the Planetary Nebula IC 1454**

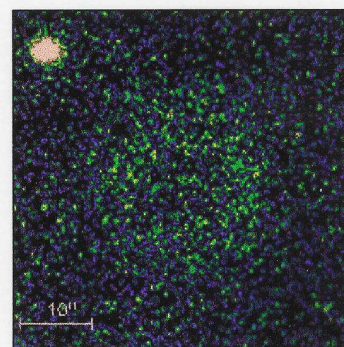
H alpha



O III



N II



He II

[\[Home Page\]](#) [\[Planetary Nebulae\]](#) [\[Quick Reference\]](#) [\[Feedback\]](#)
