

EIN VORTRAG IM RAHMEN DES SEMINARS "DAS FRUEHE UNIVERSUM"
IM WS 2003/04

INFLATIONAERE KOSMOLOGIE

STEFFEN BÜTTNER

DAS KOSMOLOGISCHE STANDARDMODELL

Das Model des Universum.

Um die Problematik dieses Modells vor Augen zu führen, soll das im Laufe des Seminars gewonnene Kosmologische Standardmodell hier in seinen Grundzügen kurz zusammengefaßt werden. Die fundamentalen Symmetrien dieses Modells stellen sich dabei als direkte Folge der Anwendung des KOSMOLOGISCHEN PRINZIPS auf die Metrik $g_{\mu\nu}$ der allg. Relativitätstheorie heraus. Dies bedeutet, daß das Linienelement

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

, sprich die Raum-Zeit, O.B.d.A¹ wie folgt zerfällt:

$$(ds)^2 = -(dt)^2 + (a(t) \cdot d\Omega_3)^2$$

Dabei ist $a(t)$ der sog. Skalenfaktor und $d\Omega_3$ stelle den 3-dim. isotropen Raum dar, der sich, stellt man sich diesen in einen fiktiven 4-dim. Raum mit Radius b eingebettet vor (siehe [1]), zu

$$(d\Omega_3)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r^2}{b^2}} + r^2(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2)$$

ergibt. Damit folgt die ROBERTSON-WALKER-METRIK zu

$$(ds)^2 = -(dt)^2 + a^2(t) \cdot \left\{ \frac{(dr)^2}{1 - Kr^2} + r^2(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) \right\}$$

$K \equiv \frac{1}{b^2}$ gibt hierin die Krümmung an. Den Einfluß der im Universum vorherrschenden Energie auf die Metrik - d.h. auf die Krümmung K und die zeitliche Entwicklung gegeben durch den Skalenfaktora $a(t)$ - wird durch die EINSTEINSCHEN FELDGLEICHUNG

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

bzw. im Rahmen der Robertson-Walker-Metrik, also des Kosmologischen Prinzips, durch die FRIEDMANN-LEMAITRE Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \end{aligned}$$

bestimmt.² Führt man nun die Hubblefunktion $H \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ ein, so erhält man

¹Eine Transformation der Zeit zu $g_{00} = -1$ ist frei wählbar.

²Das Kosmologische Prinzip impliziert auch, daß der Energie-Impuls Tensor $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$ die Form einer idealen Flüssigkeit besitzt. ρ entspricht der Energiedichte, p dem Druck.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

bzw.

$$K \equiv \dot{a}^2 \Omega_K = \dot{a}^2 (\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1)$$

mit

$$\begin{aligned}\Omega_m &\equiv \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \\ \Omega_\Lambda &\equiv \frac{\Lambda}{3H^2}\end{aligned}$$

Eine äquivalente Formulierung durch eine Kontinuitätsgleichung (1. Hauptsatz der Thermodynamik) erhält man durch Differentiation der ersten Friedmann-Lemaître Gleichung nach der Zeit

$$\begin{aligned}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}a^2\rho - K + \frac{\Lambda}{3}a^2 \\ 2 \cdot \frac{da}{dt} \cdot \frac{d^2a}{dt^2} &= \frac{8\pi G}{3} \left(2a\rho \frac{da}{dt} + a^2 \frac{d\rho}{dt}\right) + \frac{2\Lambda}{3}a \cdot \frac{da}{dt} \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{d^2a}{dt^2} &= \frac{4\pi G}{3} \left(2\rho + \frac{a}{a} \frac{d\rho}{dt}\right) + \frac{\Lambda}{3}\end{aligned}$$

und gleichsetzen mit der Zweiten

$$\begin{aligned}-(\rho + 3p) &= 2\rho + \frac{a}{a} \frac{d\rho}{dt} \\ \frac{d\rho}{dt} &= -3 \cdot H(t) \cdot (\rho + p)\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zeitlichen Entwicklung $a(t)$ integriert man diese Gleichung unter der zusätzlichen Annahme einer Zustandsgleichung der Form $p = \omega\rho$ mit $\omega = \text{const.}$

$$\begin{aligned}\int dt \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= -3 \cdot (1 + \omega) \cdot \int dt \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \\ \implies \rho &\propto a^{-3 \cdot (1 + \omega)}\end{aligned}$$

D.h. durch eine Eichung³ auf $\rho(t_0) = \rho_0$ sowie $a(t_0) = a_0 = 1$ erhält man

$$\rho = \rho_0 a^{-3 \cdot (1 + \omega)}$$

ω ist hierbei von der Materieform abhängig, so daß sich zwei Fälle unterscheiden lassen

$\omega = 0$: Für nicht-relativistische Materie, genannt Staub: $p = 0$, $\rho \propto a^{-3}$
 $\omega = \frac{1}{3}$: Für ultra-relativistische Materie oder Strahlung: $\rho \propto a^{-4}$

³Diese Eichung berücksichtigt ebenfalls den Beitrag von Λ zur Energiedichte. In der Literatur wird dieser Beitrag oftmals durch den zusätzlichen Fall $\omega = -1$, also $p = -\rho$ und $\rho = \rho_\Lambda$, abgedeckt.

Als allgemeines Resultat läßt sich das hieraus gewonnene kosmologische Modell also mit den folgenden drei Gleichungen beschreiben:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{d\rho}{dt} &= -3 \cdot H(t) \cdot (\rho + p) \\ \rho &= \rho_0 a^{-3 \cdot (1+\omega)} \text{ fuer } \omega \in \left\{0; \frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

Kosmologische Beobachtungen.

Nahezu sämtliche Informationen über die Entwicklung des Universums gelangen in Form von elektromagnetischer Strahlung zu uns, weshalb deren Ausbreitung in der ROBERTSON-WALKER-METRIK von grundsätzlicher Bedeutung ist. Geht man von $(ds)^2 = 0$ aus und wählt O.B.d.A $\phi, \theta = const.$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (ds)^2 = -(dt)^2 + a^2(t) \cdot \frac{(dr)^2}{1-Kr^2} \\ (dt)^2 &= \frac{a^2(t) \cdot (dr)^2}{1-Kr^2} \end{aligned}$$

Integration über die Weltlinie liefert

$$\int_{t_{emitted}}^{t_{observed}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{distance} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung definiert, wie die folgende Rechnung für Raumartige Ereignisse ($dt = 0$) zeigt, eine raumartige Hyperfläche mit Ausdehnung d_H . Dies ist die Fläche aller Ereignisse mit der ein Raum-Zeitpunkt innerhalb $\Delta t = t_{observed} - t_{emitted}$ in kausalem Zusammenhang steht.

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= a^2(t) \cdot \frac{(dr)^2}{1-Kr^2} \\ d &\equiv \int ds = a(t) \cdot \int_{distance} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$d_H \equiv a(t) \cdot \int_{t_{emitted}}^{t_{observed}} \frac{dt'}{a(t')}$$

Die Menge aller so definierten, raumartigen Hyperflächen bildet einen Vergangenheitslichtkegel (bzw. Zukunftslichtkegel) dessen Oberfläche als Ereignishorizont (bzw. Teilchenhorizont) bezeichnet wird.

Allgemein lassen sich hiermit nur Ereignisse beobachten, die innerhalb des Ereignishorizontes des Beobachters liegen. Man beachte, daß dieser maßgeblich durch die Funktion $a(t)$ bestimmt wird.

Interpretiert man die Gleichung

$$(dt)^2 = \frac{a^2(t) \cdot (dr)^2}{1-Kr^2} \iff dt = a(t) \cdot \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}$$

derart, daß dt eine Funktion des Skalenparameters a ist, so erhält man außerdem eine Beziehung für die kosmologische Rotverschiebung

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{c \cdot dt}{a(t)} = \frac{\lambda}{a(t)} = \text{const.}$$

d.h. die Funktion $a(t)$ bewirkt, daß sich ausbreitendes Licht mit dem Raum gedehnt oder gestaucht wird, also für seine Wellenlänge gilt

$$\frac{\lambda_{\text{emitted}}}{\lambda_{\text{observed}}} = \frac{a(t_{\text{emitted}})}{a(t_{\text{observed}})} = \frac{v_{\text{observed}}}{v_{\text{emitted}}}$$

Aus der beobachteten Rotverschiebung z , die wie folgt definiert ist

$$\frac{\lambda_{\text{observed}}}{\lambda_{\text{emitted}}} = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{emitted}}} \equiv 1 + z$$

kann man direkt auf ein sich ausdehnendes Universum, also $\partial_t a > 0$ schließen. Eine größere Rotverschiebung bedeutet also, daß das beobachtete Licht zu einem früheren Zeitpunkt emittiert wurde, oder, unter Beachtung der Lichtgeschwindigkeit, daß es sich um eine weiter entfernte Quelle handeln muß.⁴

Ebenso bedeutet dieser Effekt der Rotverschiebung, daß, geht man von einem expandierenden Universum aus, in dem zu einem frühen Zeitpunkt ein beliebiges Strahlungsfeld vorherrschte, in unserer jetzigen Epoche der Raum nach

$$\frac{\lambda_{\text{emitted}}}{\lambda_{\text{observed}}} = \frac{a(t_{\text{emitted}})}{a(t_{\text{observed}})}$$

von einer niederenergetischeren, isotropen Strahlung durchsetzt sein müßte. Aus einer Messung dieser Hintergrundstrahlung⁵ lassen sich, wie im Laufe des Seminars (oder aus [1]) noch ersichtlich werden wird, die Parameter des obigen Modells - für das beobachtbare Universum - wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} K &\approx 0 \\ \Omega_m &\approx 0.27(4) \\ \Omega_\Lambda &\approx 0.73(4) \\ h_0 &\approx 0.71(4)^6 \end{aligned}$$

Übernimmt man die beobachtete Flachheit in obiges Modell, vereinfacht sich dieses zu

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}$$

⁴Eine lineare Näherung dieses Sachverhalts stellt der Dopplereffekt bzw. die Hubblebeziehung $v \sim c \cdot \delta t \cdot H_0$ dar.

⁵Diese Strahlung wurde erstmals 1941 von A. McKellar indirekt gemessen und bis heute gibt es eine Vielzahl an Messungen wie z.B. MAT, OVRO (bodengestützt), BOOMERanG (Ballon) oder COBE, MAP (Satellit), die einen mittleren Wert von $T_0 = (2.73 \pm 0.01)K$ ergaben.

⁶ $H = h \cdot 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

$$\frac{d\rho}{dt} = -3 \cdot H(t) \cdot (\rho + p)$$

$$\rho = \rho_0 a^{-3 \cdot (1+\omega)} \text{ fuer } \omega \in \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$$

In diesem Spezialfall und für ein von nicht-relativistischer Materie beherrschtes Universum läßt sich die erste Gleichung mit Hilfe der Dritten, sowie obiger Definitionen umformen zu

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho_0 a^{-3} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0 \left(\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{\Lambda,0} a^2\right)$$

und analytisch lösen ($K = 0 \Rightarrow \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$)

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{1/3} \left[\sinh\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\Omega_m}H_0 t\right)\right]^{2/3}$$

Hieraus erhält man unter anderem für das Alter des Universums

$$t_0 \approx 13.5 \text{ Gyr.}$$

Offene Fragestellungen.

Horizontproblem.

Wie oben betrachtet hat jeder Punkt E_0 der Raum-Zeit einen Ereignishorizont, der die Ereignisse definiert, die in kausalem Zusammenhang mit E_0 stehen. Wendet man dieses Prinzip auf die Meßdaten der Hintergrundstrahlung an (s. Abb.1), so findet man, daß die gemessene Strahlung zwar bis auf $\Delta T = 0.4 \cdot 10^{-3} K$ homogen ist, aber zum Zeitpunkt ihrer Entstehung in noch keinem ausreichenden, kausalen Zusammenhang stand. Dies nennt man das Horizontproblem.

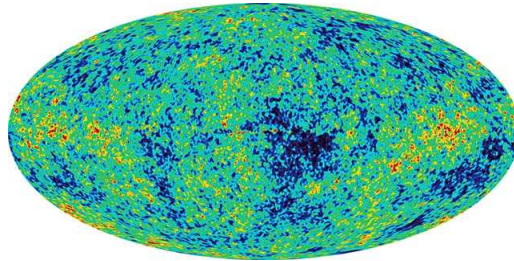


ABB.1: WMAP Messdaten nach <http://map.gsfc.nasa.gov>

Man sieht dies wie folgt ein: Geht man von einem expandierenden Universum aus, so bedeutet dies, daß sich das Universum mit der Zeit adiabatisch abgekühlt hat bzw. zu früheren Zeitpunkten beliebig heiße Epochen existierten. Wie Abb.2 zeigt muß eine der letzten Folgen dieser Abkühlung auf dem Weg zu unserem heutigen Universum die Entkopplung von Materie und Strahlung durch Rekombination bei

ca. $T_{rec} = 3000K$ gewesen sein. Unter Beachtung obiger Überlegungen zur Rotverschiebung bedeutet dies, daß die zum Zeitpunkt t_{rec} emittierte und heute (t_0) als Hintergrundstrahlung mit $T_0 = 2.73K$ gemessene Strahlung bei

$$\frac{T_{rec}}{T_0} = \frac{2.73K}{3000K} = \frac{a(t_{rec})}{a(t_0)} \approx \left(\frac{t_{rec}}{t_0}\right)^{2/3}{}^7$$

$t_{rec} \approx 260,000 h^{-1}yr$ (d.h. $z \approx 1000$) entkoppelte. Die räumliche Entfernung die das Licht bis heute zurückgelegt hat oder, anders ausgedrückt, der maximale Radius des Ereignishorizontes des Beobachters von t_{rec} bis t_0 beträgt

$$d_0 = a(t_0) \cdot \int_{t_{rec}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \approx 3t_0 \left[1 - \left(\frac{t_{rec}}{t_0}\right)^{2/3} \right] \approx 3t_0 \approx 9,000 h^{-1}Mpc$$

Analog erhält man den Ereignishorizont von $t = 0$ bis $t_{rec} = 260,000 h^{-1}yr$ zu $d_{rec} \approx 0.161 h^{-1}Mpc$ -, der sich bis heute auf einen Radius von

$$0.161 h^{-1}Mpc \cdot \left(\frac{a(t_0)}{a(t_{rec})}\right) \approx 177 h^{-1}Mpc$$

ausgedehnt hat. Projiziert man diese Fläche, innerhalb derer zum Zeitpunkt der Entkopplung kausaler Zusammenhang bestand, auf den Ereignishorizont eines heutigen Beobachters der Hintergrundstrahlung (dieser hat wie oben berechnet einen Radius von $9,000 h^{-1}Mpc$), so entspricht sie einem Beobachtungswinkel von

$$\theta \approx \frac{177}{9000} \approx 0.02 rad$$

d.h. die Hintergrundstrahlung läßt sich in $4\pi/0.02^2 \approx 30,000$ nicht kausal verknüpfte Pflaster zerlegen - ganz im Widerspruch zur beobachteten Isotropie.

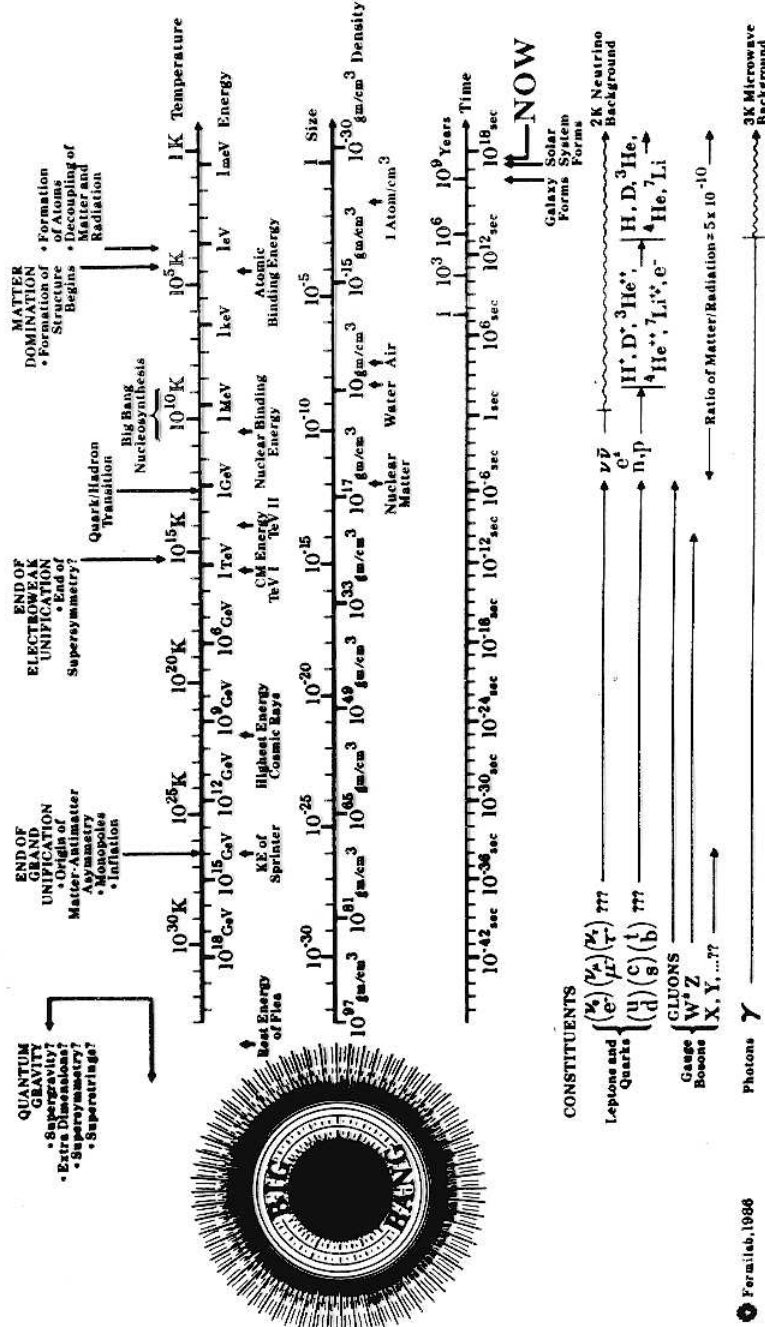
Flachheitsproblem.

Nach den oben vorgestellten Beobachtungsdaten ist die Krümmung unseres Modells bemerkenswert klein, d.h. $K \approx 0$. Aus obiger Überlegung

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

ist zwar ersichtlich, daß der Krümmungsterm $\frac{K}{a^2}$ für große Skalenfaktoren nahezu verschwindet, allerdings sagt das Standardmodell keine solch großen Werte für $a(t)$ voraus, daß die geringe, heute gemessene Krümmung allein auf diesen Effekt zurückzuführen wäre. K muß somit bereits anfangs sehr nahe bei null gelegen haben - doch diese Folgerung ist aus dem Modell nicht begründbar.

⁷Verwendete Näherung: $a(t) \propto t^{2/3}$



The 'complete' history of the Universe, reproduced by permission of E. W. Kolb and M. S. Turner

ABB.2: Geschichte des Universum nach <http://wwwnp.tphys.uni-heidelberg.de>

Monopolproblem.

Da es sich hierbei um das Thema des folgenden Vortrages dieser Reihe handelt, sei hier nur so viel gesagt: GUTs zufolge müßten im Verlauf der Entstehung des Universums innerhalb des Urknallmodells durch Phasenübergänge magnetische Monopole entstanden sein und dies derart häufig, daß deren Energiedichte zum Zeitpunkt der Nukleosynthese dominant gewesen sein müßte.

Problem der Fluktuationen.

Um die Strukturbildung in der 3K-Hintergrundstrahlung - und somit auch die späteren, materiellen Strukturen - zu erklären muß die absolute Homogenität und Isotropie, wie sie durch das Kosmologische Prinzip in das kosmologische Standardmodell eingeht, gestört werden. Der Ursprung dessen ging in bisherige Überlegungen nicht ein.

Expansionsproblem.

Ebenso unerklärt bleiben die Anfangsbedingungen der Expansion.

INFLATIONÄRE KOSMOLOGIE

Das Inflatonfeld.

Die oben aufgeführten Probleme des Standardmodells können vermieden werden, wenn man davon ausgeht, daß zu Beginn der Entstehung des Universums ein skalares Feld $\phi(x, t)$, genannt das Inflaton, dominanten Einfluß besaß. Die hierzu anzunehmenden Eigenschaften eines solchen Feldes sind, wie sich nachträglich zeigen soll, folgende

- $\nabla\phi \approx 0$ d.h. das Feld sei nahezu homogen
- Das Feld erfährt für $T \approx T_c$ einen Phasenübergang, d.h. die Potentialenergiedichte $V(\phi)$ besitzt die in Abb.3 gezeigte Form mit einem Minimum bei $\phi = 0$ mit $V(0) \equiv V_i^8$ für $T > T_c$, also $\langle\phi\rangle|_{T>T_c} = 0$, und einem Minimum, dem 'true vacuum', bei $\phi_{min} = \pm \langle\phi\rangle|_{T<T_c}$ mit $V(\pm\langle\phi\rangle) = 0$ für $T < T_c$.
- Dieser Übergang erfolgt ausreichend langsam, sodaß $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Diese Bedingung wird als "slow roll" bezeichnet.

⁸Die Indizes i (initial) und f (final) sollen im Folgenden Größen zu Beginn und Ende der Inflation bezeichnen.

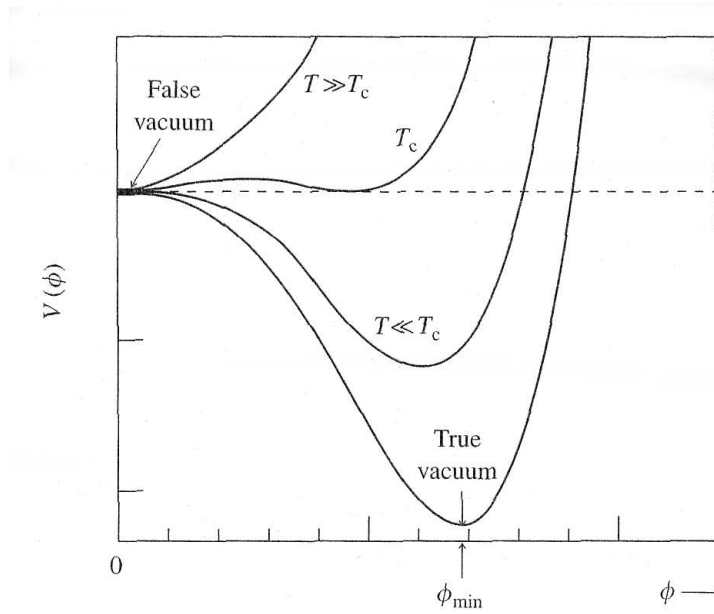


ABB.3: Potentialenergiedichte des Inflaton nach [8]

Der Vorgang des Phasenübergangs ergibt sich (siehe Abb.4) hieraus wie folgt: Zu Beginn kühlt sich das Universum, anfangs auf einer Temperatur, die der Planck-Temperatur $kT = M_{PL} = kT_{GUT}$ entspricht, ab, bis bei $T \approx T_c$ der Potentialwall zwischen $\langle \phi \rangle|_{T > T_c}$ und $\langle \phi \rangle|_{T < T_c}$ erstmals durchtunnelt werden kann. Geschieht dies, so bilden sich im Universum einzelne "Blasen" aus in denen sich das System im neuen Vakuum-Zustand befindet. Diese Blasen beginnen zu wachsen und verschmelzen schließlich miteinander womit das gesamte Universum in den neuen Vakuum-Zustand übergegangen ist. Die bis zu diesem Zeitpunkt aus dem skalaren Feld frei gewordene Energie V_i nennt man die latente Wärme⁹, die dazu führt, daß, nimmt man eine Kopplung zu Materiefeldern an, sich das Universum erneut aufheizt d.h. sich Materie bilden kann.

⁹Die latente Wärme ist kleiner als die Energie V_i , da es sich um keinen instantanen Vorgang handelt, also die durch den Skalenfaktor bedingte Rotverschiebung berücksichtigt werden muß.

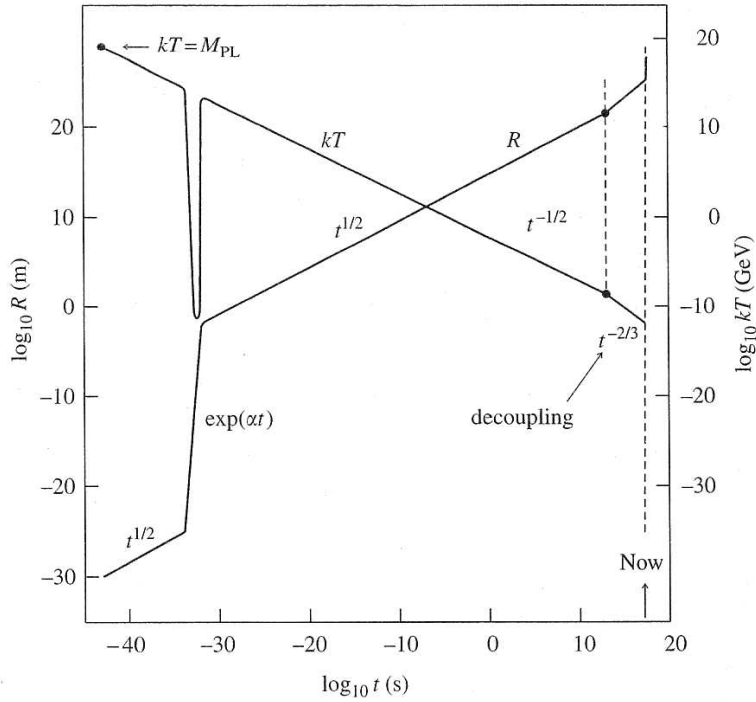


ABB.4: Phasenübergang des Inflaton nach [8]

Die Bedeutung dieser ersten Phase der Entwicklung und des Inflaton liegt in der inflationären Wirkung dieses skalaren Feldes. Die Auswirkungen des Inflaton auf die Metrik erhält man durch Bestimmung der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

und Einsetzen in den mit Hilfe des Noether Theorems gefundenen Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= -\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - V(\phi) \right) \end{aligned}$$

Da der Energie-Impuls-Tensor im Rahmen des Kosmologischen Standardmodells die Form $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$ einer idealen Flüssigkeit besitzt, erhält man die Dichte zu

$$\begin{aligned} \rho = T^{00} &= -(\partial^0 \phi)^2 + V(\phi) - \frac{1}{2} \cdot g^{\lambda\beta} \partial_\lambda \phi \partial_\beta \phi \\ &= -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \end{aligned}$$

Für den Druck ergibt sich aus

$$p = \frac{1}{3}(T^{11} + T^{22} + T^{33})$$

mit Hilfe von

$$\begin{aligned} T^{11} &= -\partial^1\phi\partial^1\phi + g^{11}\left(\frac{1}{2}\partial_\lambda\bar{\phi}\partial^\lambda\phi - V(\phi)\right) \\ &= -(\partial^1\phi)^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}\cdot g^{\lambda\beta}\partial_\lambda\phi\partial_\beta\phi \\ &= -(\partial^1\phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \end{aligned}$$

und analog T^{22} bzw. T^{33}

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^3\left[-(\partial^i\phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right] \\ &= -V(\phi) - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 \end{aligned}$$

Vernachlässigt man nun wegen den obigen Annahmen $\nabla\phi \approx 0$ und $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ diese Terme, so erhält man aus obigen Gleichungen für Druck und Dichte die Beziehung

$$p \approx -\rho \approx -V(\phi)$$

Diese Zustandsgleichung zeigt, daß solange der Phasenübergang nicht vollzogen ist das Feld (ähnlich einer kosmologischen Konstanten) zu einem negativen Druck führt. Wenn man so will, liefert das Inflaton also eine erste Antwort auf das **Expansionsproblem**.

Die Wirkung des Inflaton innerhalb des Kosmologischen Standardmodells in der oben benutzten Form

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{d\rho}{dt} &= -3\cdot H(t)\cdot(\rho + p) \\ \rho &= \rho_0 a^{-3\cdot(1+\omega)} \text{ fuer } \omega \in \left\{0; \frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

erhält man durch Einsetzen der Dichte ($\nabla\phi \approx 0$): $\rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ und des Drucks in äquivalenter Form

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\left(V(\phi) - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \dot{\phi}(-\ddot{\phi} + \partial_\phi V(\phi)) &= 3\cdot H(t)\cdot\dot{\phi}^2 \iff \ddot{\phi} + 3\cdot H(t)\cdot\dot{\phi} = \partial_\phi V(\phi) \end{aligned}$$

Betrachtet man den ersten Summanden $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\cdot V(\phi)$ so folgt näherungsweise¹⁰

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{8\pi G}{3}\cdot V_i \approx const.$$

¹⁰denn die Flachheit des Potentials wird durch die slow roll Bedingung gewährleistet

d.h. durch Integration ergibt sich der Skalenfaktor zu $a(t) \propto e^{Ht}$. Das Inflaton ist somit das während der inflationären Phase dominante Feld, sodaß hier sowohl $\frac{K}{a^2}$ als auch $\frac{\Lambda}{3}$ vernachlässigt werden kann. Mit der "slow roll" Näherung $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, sowie $\ddot{\phi} \ll V(\phi)$, folgt zusammenfassend

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \cdot V(\phi) \\ 3 \cdot H(t) \cdot \dot{\phi} &= \partial_\phi V(\phi) \\ p &\approx -\rho \end{aligned}$$

Die Größenordnung um die der Skalenfaktor während der Inflation angewachsen ist, wird bevorzugt durch N :

$$a(t_f) \equiv a(t_i) \cdot e^N \quad \text{also} \quad N \equiv \ln \left(\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt$$

angegeben.

Der durch den wachsenden Skalenfaktor zunehmend zu vernachlässigende Krümmungsterm $\frac{K}{a^2}$ in der Friedmanngleichung ist der Interpretation einer verschwindenden Krümmung völlig äquivalent: Die Lösungen der Friedmann Gleichung für verschiedene K entwickeln sich mit zunehmendem $a(t)$ zur Lösung der Gleichung für $K = 0$. Abb.5 soll diese Lösung des **Flachheitsproblems** verdeutlichen.

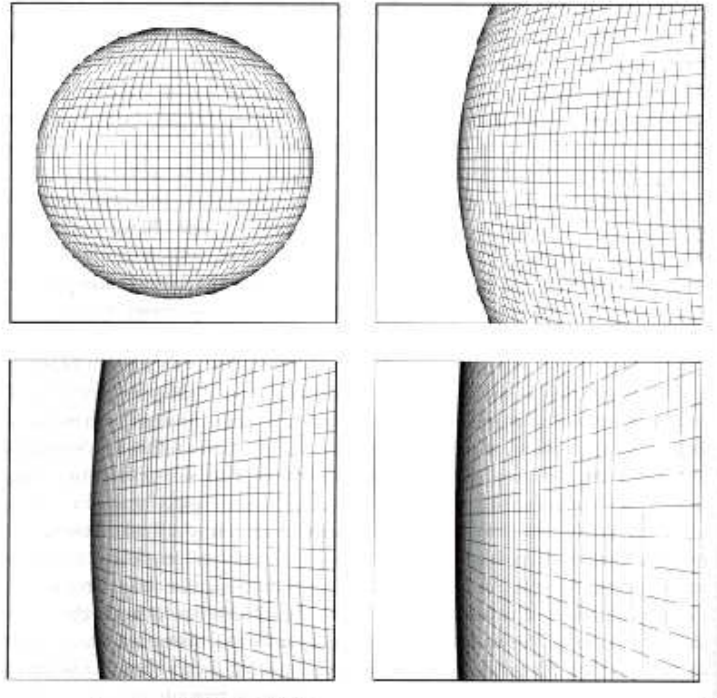


ABB.5: Zum Flachheitsproblem nach [6]

Abschätzungen ergeben einen Wert von $N \gtrsim 60$ um die heute gemessene Flachheit zu erklären. Eine Ausdehnung in einer solchen Größenordnung hätte ebenso die Monopoldichte derart verdünnt, daß diese heute keine Relevanz mehr besäße. Da nach der inflationären Phase keine weiteren Monopole entstehen konnten, denn eine damalige Temperatur von $T_f \approx 10^9 GeV$ wäre dafür nicht mehr ausreichend gewesen, löst dies ebenfalls das **Monopolproblem**.

Das **Horizontproblem** löst sich wie folgt: Der maximale Radius des Ereignishorizontes zum Zeitpunkt t_{rec} wird nun maßgebend durch die inflationäre Phase bestimmt und beträgt damit mindestens

$$d_{inf} = a(t_f) \cdot \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt'}{a(t')} = e^{Ht_f} \cdot \int_{t_i}^{t_f} e^{-Ht'} dt' \approx H^{-1} e^{H(t_f - t_i)} = H^{-1} e^N$$

Im Gegensatz zur Rechnung ohne inflationäre Phase in der $d_0 \gg d_{rec}$ ist, erhält man nun $d_0 \ll d_{inf}$ - wenn N nur groß genug ist. Abb.6 soll dies anhand einer Raum-Zeit-Skizze verdeutlichen.

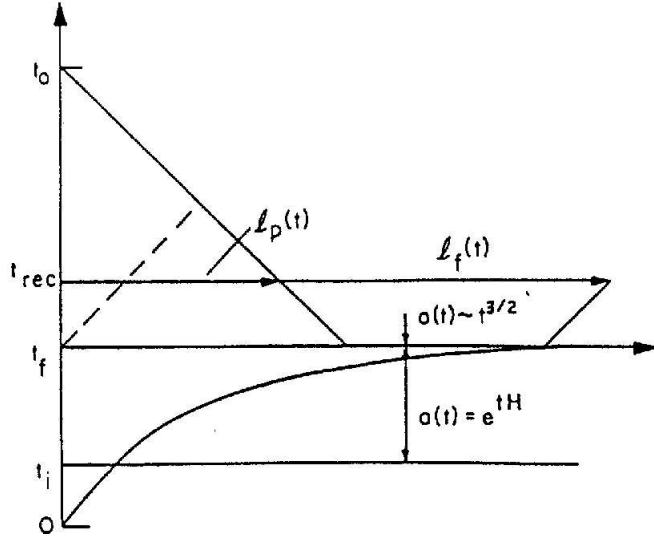


ABB.6: Zum Horizontproblem nach [9]

Ebenso wie bislang der max. Radius des Ereignishorizontes berechnet wurde, läßt sich dieser analog für den Teilchenhorizont berechnen. Für einen beliebig großen Zeitraum einer inflationären Phase erhält man so

$$d_{H^{-1}}(t) = a(t) \cdot \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = e^{Ht} \cdot \int_t^\infty e^{-Ht'} dt' = H^{-1}$$

Dieses endliche Resultat bedeutet, daß nur Ereignisse innerhalb dieses sog. Hubble-radius je von einem zum Zeitpunkt t ausgesandten Signal erreicht werden können, also kausal verknüpft sind.

Äquivalent ausgedrückt strebt die vom Signal zurückgelegte "comoving" ¹¹ Distanz $\frac{dt}{a(t)}$ rasch gegen Null, sollte die Expansion beliebig groß werden. Die Summe dieser Distanzen $\int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')}$ ist damit abhängig vom Emissionszeitpunkt t und wird umso kleiner je größer t ist, d.h. es werden bei späterer Emission weniger Ereignisse erreicht.

In unserem Beobachtersystem (mit $a(t)$), in dem der Grenzwert H^{-1} unabhängig vom Zeitpunkt t der Emission ist, manifestiert sich dies auf die Art, daß Ereignisse, die bei Emission zu einem früheren Zeitpunkt noch erreichbar waren und dies für später emittierte Signale nicht mehr sein können, über den Teilchenhorizont hinaus expandieren. Diesen Sachverhalt stellt Abb.7 durch den Abstand eines Ereignisses d_c dar, der über den Teilchenhorizont hinaus expandiert und nach der Inflation erneut vom Hubbleradius eingeholt wird.

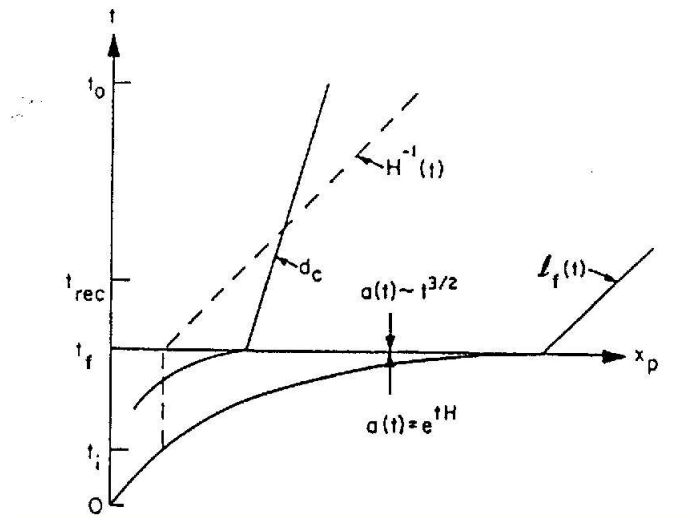


ABB.7: Teilchenhorizont und Inflation nach [9]

Dieser Hubbleradius ist nun maßgebend für die Entstehung von thermischen Fluktuationen, sprich der Untersuchung des **Fluktuationsproblems**. Da der Hubbleradius den kausalen Horizont während der Inflation darstellt, müssen Quantenfelder auf diesen Radius begrenzt sein. Quantenfluktuationen die nun während der inflationären Phase und innerhalb eines Hubbleradius bestehen¹², expandieren auf Größenordnungen, die oberhalb des Hubbleradius und damit ausserhalb kausal verknüpfter Gebiete liegen. Auf diese Weise "gefrieren" sie zu klassischen Störungen, die später für die Strukturbildung im Universum verantwortlich gemacht werden können.

¹¹def. durch: $dt = a(t) \cdot d\Omega_{comoving}$

¹²Man kann hier argumentieren, daß diese Fluktuationen durch die Begrenzung auf den Hubbleradius bedingt sind, denn $\Delta p \Delta x \geq 1 \implies \Delta p \geq H$

Ein Analogon hierzu ist die Hawking Strahlung eines schwarzen Loches, bei der Fluktuationen, sprich Teilchen und Antiteilchen, durch den Horizont getrennt werden und das außerhalb verbleibende Teilchen zur Messung einer Hawking Temperatur führt. Für das Inflaton erhält man eine solche Temperatur, die bei skalaren, masselosen Feldern der Fluktuation entspricht, zu

$$\delta\phi = T_{Hawking} = \frac{H}{2\pi}$$

Durch den somit örtlich unterschiedlichen Entwicklungszustand des Inflaton um $\delta\phi$ ergeben sich Energiedichtestörungen von

$$\delta\rho = \partial_\phi V(\phi) \cdot \delta\phi$$

Conclusion. Wie sich gezeigt hat ist die Inflationäre Kosmologie also im Stande Phänomene zu erklären, die im Rahmen des Standardmodells ungeklärt blieben. Allerdings besitzt sie noch immer eine Vielzahl von Problemen, Varianten und offenen Parametern. Für eine kurze Übersicht dieser sei der Leser auf [9] verwiesen.

LITERATUR.

- [1] S.Buettner, Dunkle Materie, Vortrag zum Studentenseminar der Astroteilchenphysik im WS2003/04 an der Universität Tuebingen
- [2] L.D.Landau,E.M.Lifschtz, Lehrbuch der Theoretischen Physik II Feldtheorie
- [3] Ofer Lahav, Yasushi Suto, Measuring our universe from galaxy redshift surveys (arXiv:astro-ph/0310642 v2 23 Okt 2003)
- [4] <http://wwwnp.tphys.uni-heidelberg.de/Nucl>
- [5] G. Lazarides, Introduction to inflationary cosmology (arXiv:hep-ph/0204294 v2 30 Apr 02)
- [6] G. S. Watson, An exposition on inflationary cosmology (arXiv:astro-ph/0005003 v2 27 May 2000) bzw. <http://nedwww.ipac.caltech.edu>
- [7] <http://map.gsfc.nasa.gov>
- [8] D. Perkins, Particle Astrophysics, Oxford Univ Press
- [9] R.H.Brandenberger, Principles, Progress and Problems in Infl. Cosmology (arXiv:astro-ph/0208103 v1 5 Aug 2002)