Seminar Frühes Universum
Wintersemester 2003/04

Weltmodelle I:

Friedmann-Modell des Universums

Markus Kromer

Gliederung

- Einführung
  - Hubble-Gesetz
  - Grundgedanken der ART
- Grundlagen
- Kinematik
- Dynamik

Lösungen der Friedmann-Gleichung: Vortrag Weltmodelle II

Hubble-Gesetz

- Spektrallinien entfernter Galaxien (Abstand *d*) sind rotverschoben

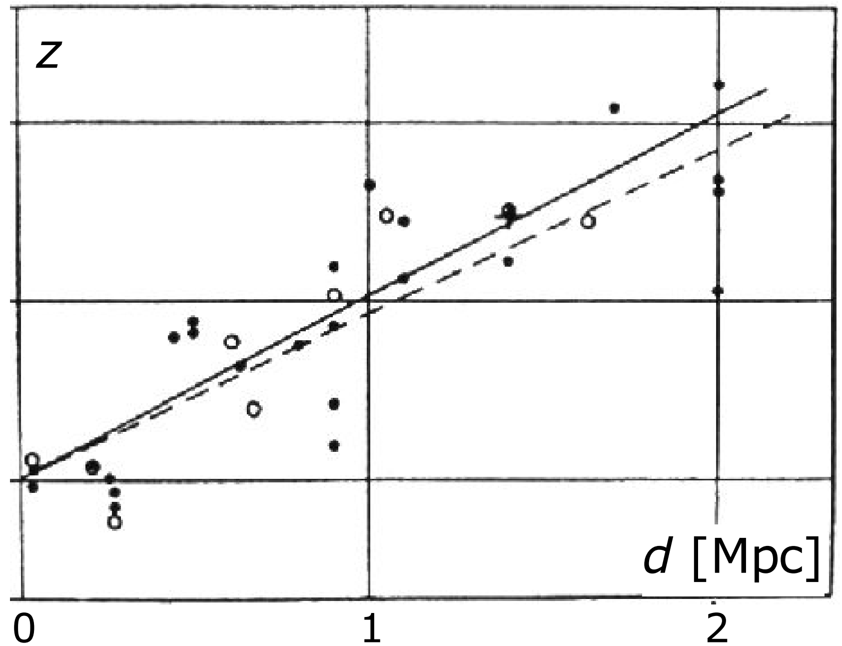
$$z = \frac{\lambda_{observed} - \lambda_{emitted}}{\lambda_{emitted}} = \frac{\lambda_{observed}}{\lambda_{emitted}} - 1$$

- Deutung als Dopplereffekt $z = \frac{\lambda_{observed} - \lambda_{emitted}}{\lambda_{emitted}} = \frac{v}{c}$
  - $\Rightarrow$ Fluchtgeschwindigkeit $v = cz$
  - $\Rightarrow$ das Universum expandiert

- Hubble 1929: $z \sim d$
  - $\Rightarrow$ Hubble-Gesetz: $v = cz = H_0 d$
  - $\Rightarrow$ mit Hubble-Konstante $H_0 = (72 \pm 8)\ \text{km s}^{-1}\ \text{Mpc}^{-1}$

- Hubble-Zeit „definiert" Weltalter

$$\tau_0 = \frac{d}{v} = \frac{1}{H_0} \quad \Rightarrow \quad \tau_0 \approx 13{,}6 \cdot 10^9 a$$



Grundgedanken der ART

- *Wie in der SRT:* vierdimensionale Raum-Zeit
  - physikal. Ereignisse werden durch Punkte $\mathbf{x}=x^a$ in diesem 4-dimensionalen Raum beschrieben
  - Linienelement $ds^2=g_{ab}dx^a dx^b$ legt die Geometrie fest
- ***Neu:* Energie krümmt die Raum-Zeit**
  Wechselwirkung beschrieben durch Einsteinsche-Feldgleichungen $G_{ab}-\Lambda g_{ab}=8\pi G T_{ab}$
  - Einstein-Tensor $G_{ab}=R_{ab}-\frac{1}{2}R g_{ab}$
  - Ricci-Tensor R_{ab} ⎫ Funktionen von g_{ab}
  - Ricci-Skalar R ⎭
  - Energie-Impuls-Tensor T_{ab}
- Bewegung in der gekrümmten Raum-Zeit entlang Geodäten

Bezeichnungen

$\mathbf{x}=x^a$
Vierervektor
a,b,...=0,1,2,3

$\vec{x}=x^\alpha$
Dreiervektor
$\alpha,\beta,\ldots=1,2,3$

g_{ab}
Metrischer Tensor

Λ
Kosmologische Konst.

G
Gravitationskonstante

Gliederung

- Einführung
- Grundlagen
  - Galaxiengas & Kosmologisches Prinzip
  - Kosmologisches Prinzip in der ART
  - Mitbewegtes Koordinatensystem
  - Skalenfaktor
  - Robertson-Walker-Metrik
- Kinematik
- Dynamik

Galaxiengas & Kosmologisches Prinzip

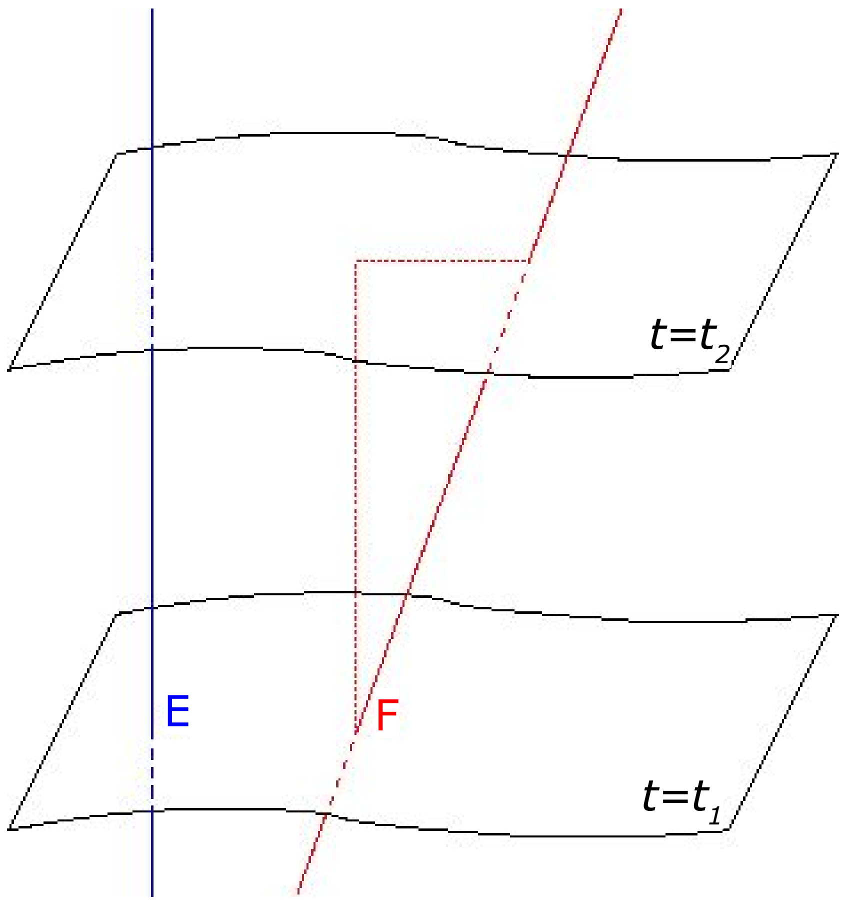
- Betrachtung des Universums als Ganzes
  - Galaxien sind „Elementarteilchen" eines Gases
  - Galaxienverteilung durch ausgeschmierte Dichte ρ beschrieben
- Forderung: Galaxiengas soll eine ideale Flüssigkeit sein
  - mit dem Gas bewegter Beobachter (Geschwindigkeit **u**) sieht die Galaxien in seiner Umgebung in Ruhe
  - einfache Form des Energie-Impuls-Tensor T_{ab}
- Weitere Forderung: sog. **kosmologisches Prinzip (KP)**

> Das Universum bietet zu jedem Zeitpunkt von jedem Punkt aus den gleichen Anblick $\Leftrightarrow$ Homogenität und Isotropie des Raumes.

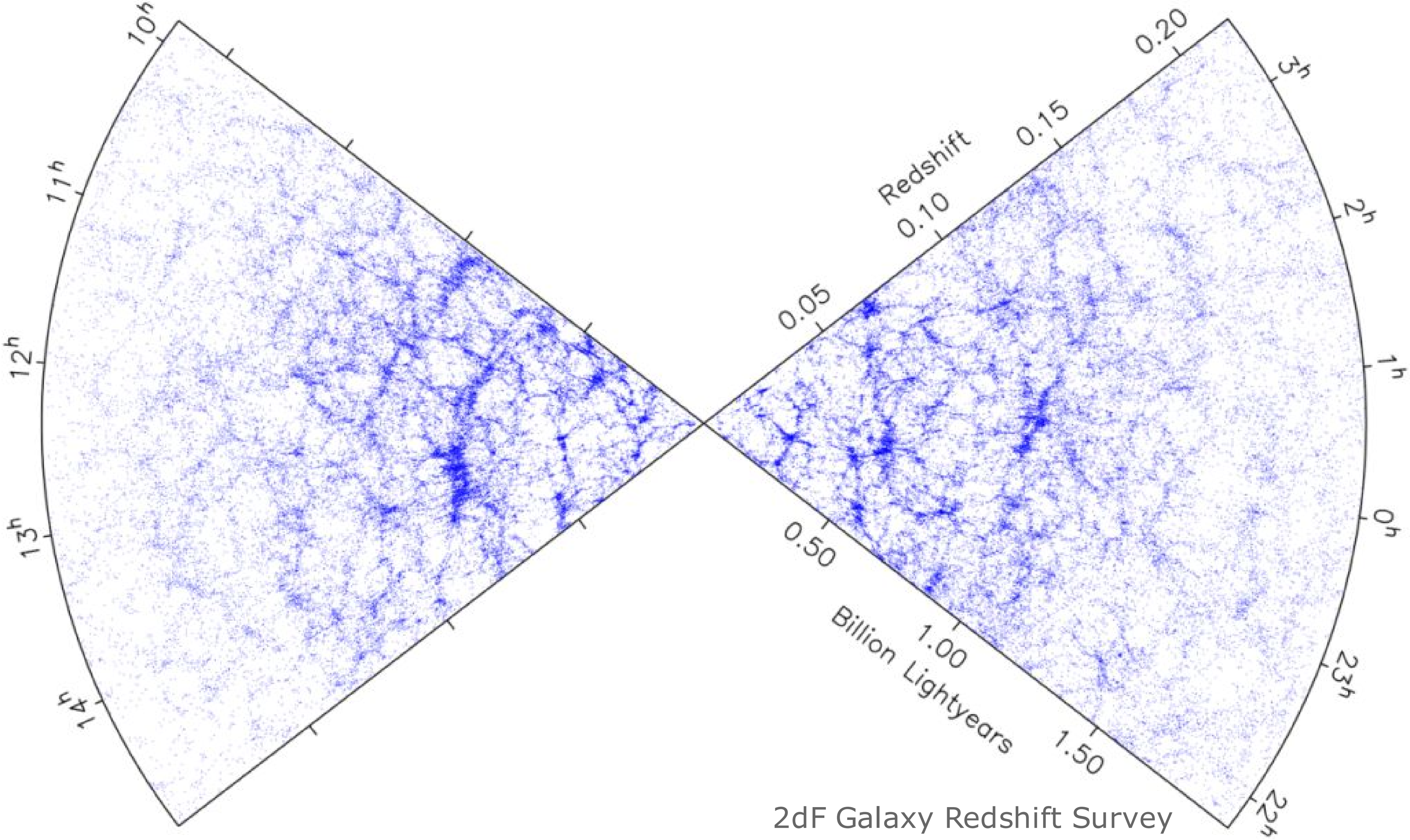
- Friedmann-Modell beruht allein auf diesen Annahmen!

Kosmologisches Prinzip in der ART

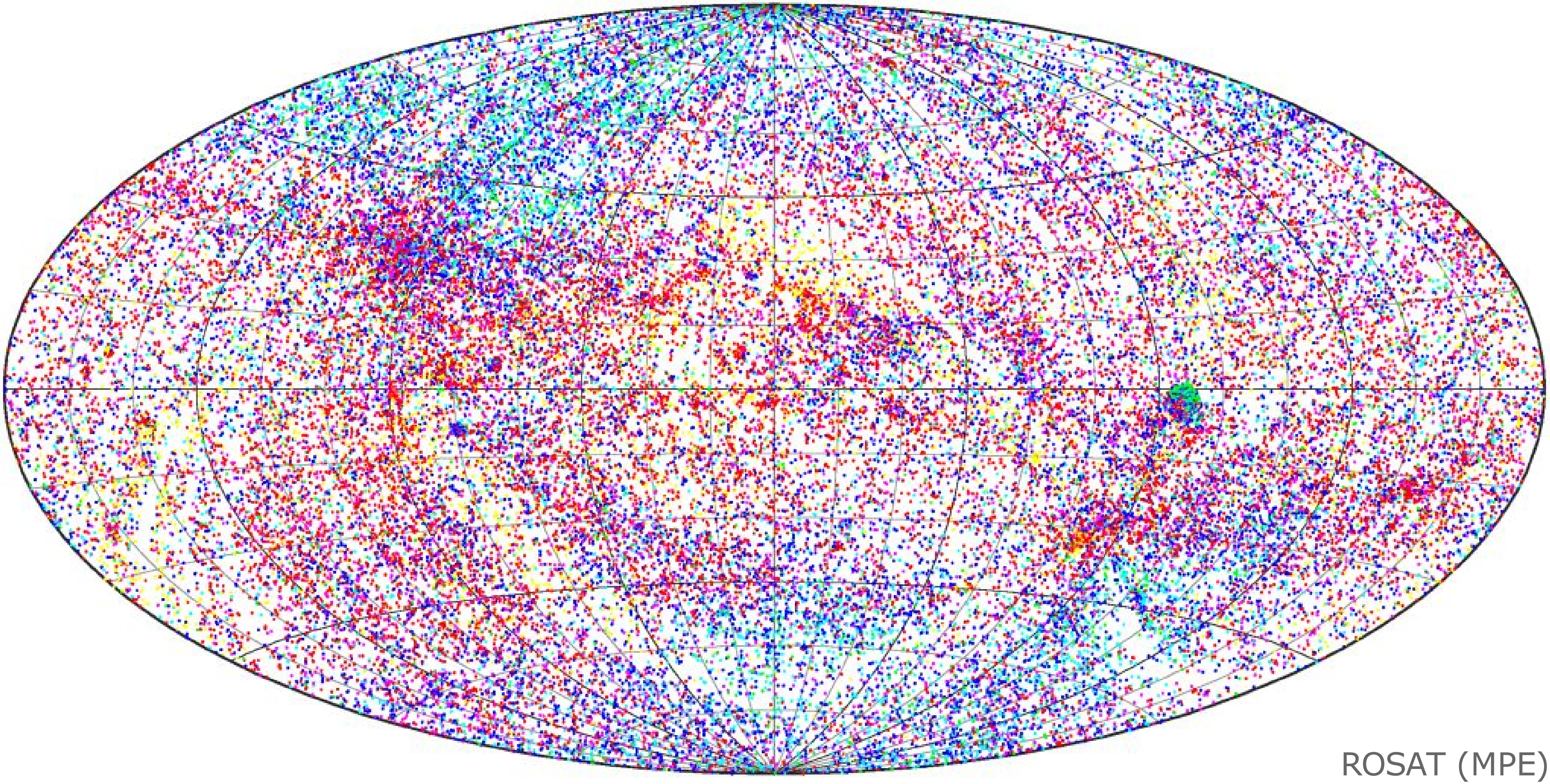
- Betrachte raumartige Hyperflächen t=const. der Raum-Zeit
- KP: jede raumartige Hyperfläche muss homogen und isotrop sein
- Isotropie ⇒ Weltlinien des Galaxiengases müssen raumartige Hyperflächen orthogonal schneiden
- Geometrie des Raumes durch Massenverteilung bestimmt
  - ⇒ Massen müssen homogen und isotrop verteilt sein
  - ⇒ Ist dies tatsächlich erfüllt?



Galaxienverteilung

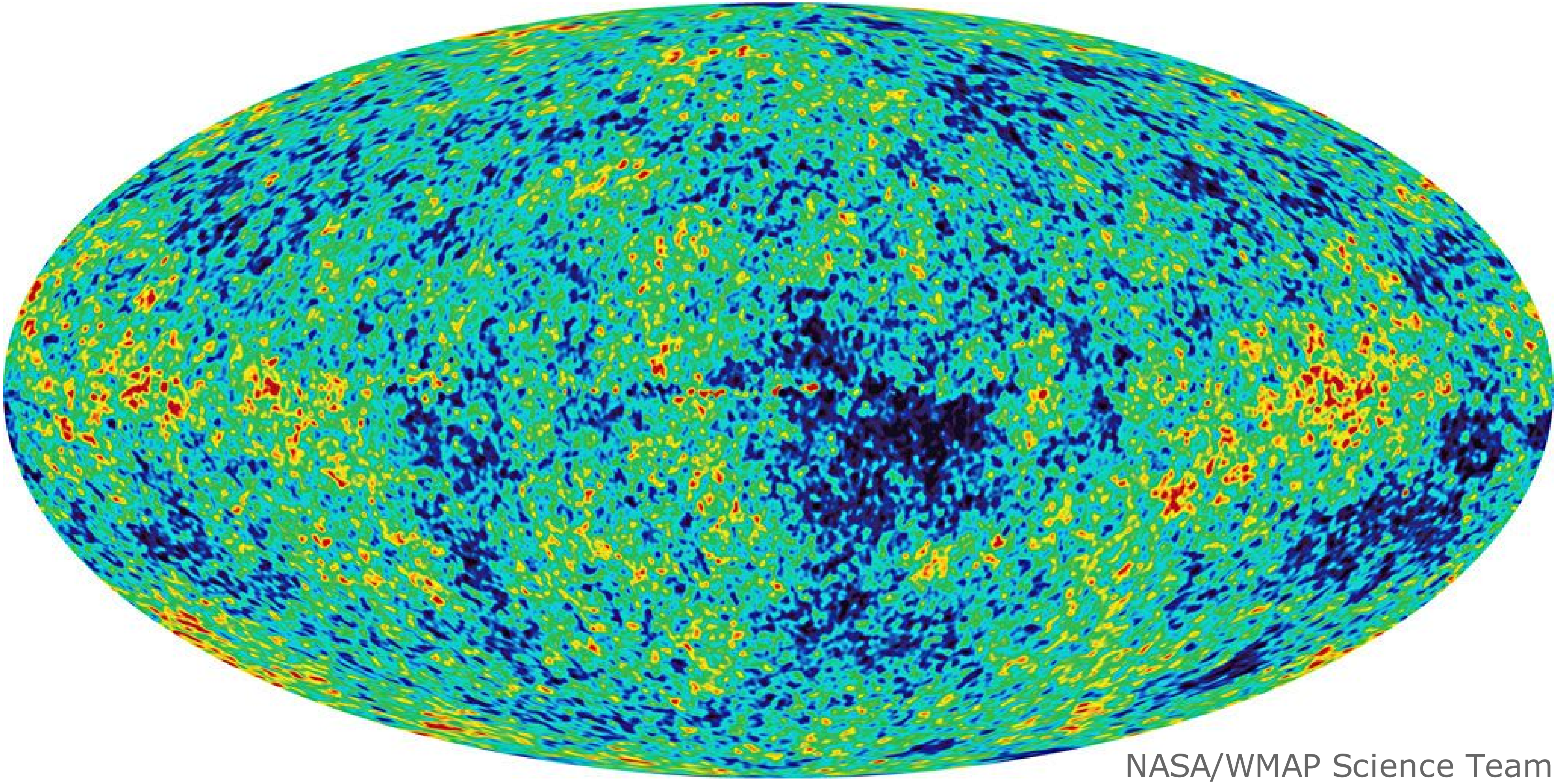


Diffuser Röntgenhintergrund



ROSAT (MPE)

Isotropie der 3K-Hintergrundstrahlung



NASA/WMAP Science Team

Mitbewegtes Koordinatensystem

- mit dem Galaxiengas bewegter Beobachter bleibt für beliebige t=const. am selben Ort auf der Hyperfläche
- Wahl der Zeitkoordinate t als Eigenzeit entlang Weltlinie eines Teilchens
- Wegen $g_{ab}=\frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b}$ folgt dann

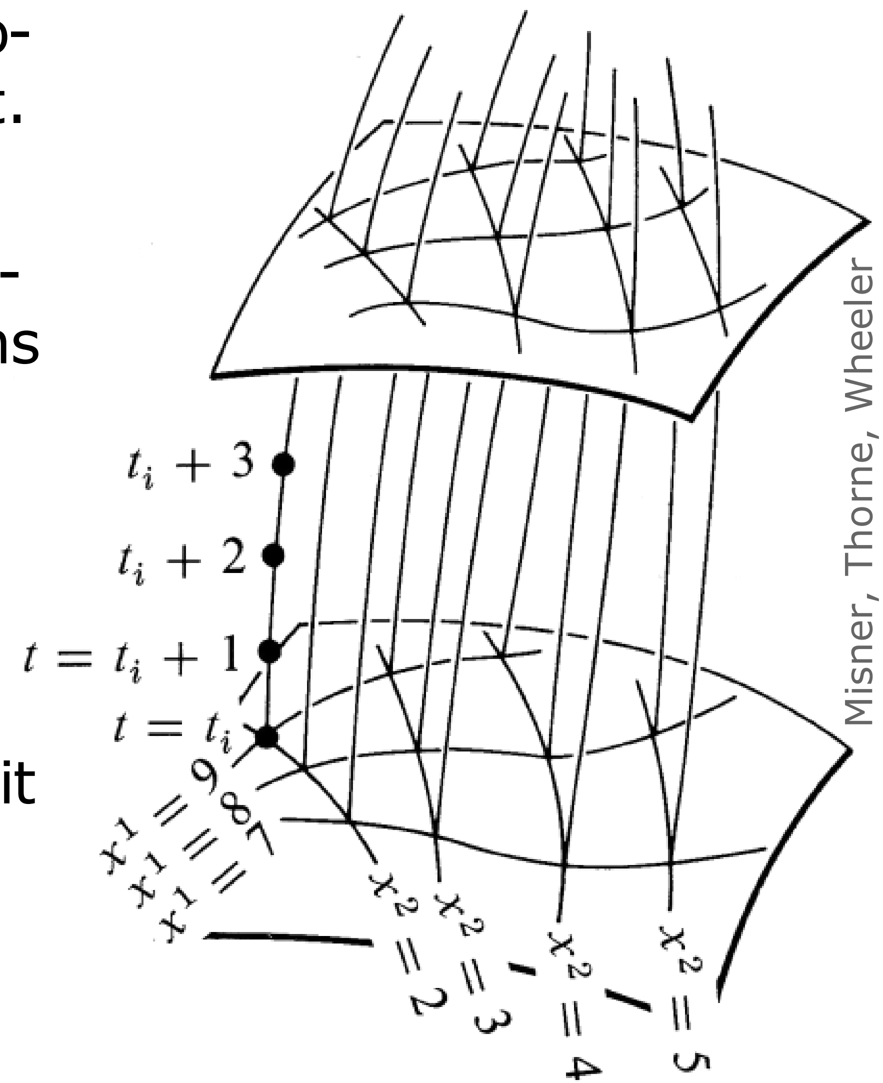
$$g_{0\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}=0$$

und $g_{00}=1$

$\Rightarrow$ Metrik $ds^2=g_{ab}dx^a dx^b$ der Raum-Zeit zerfällt in

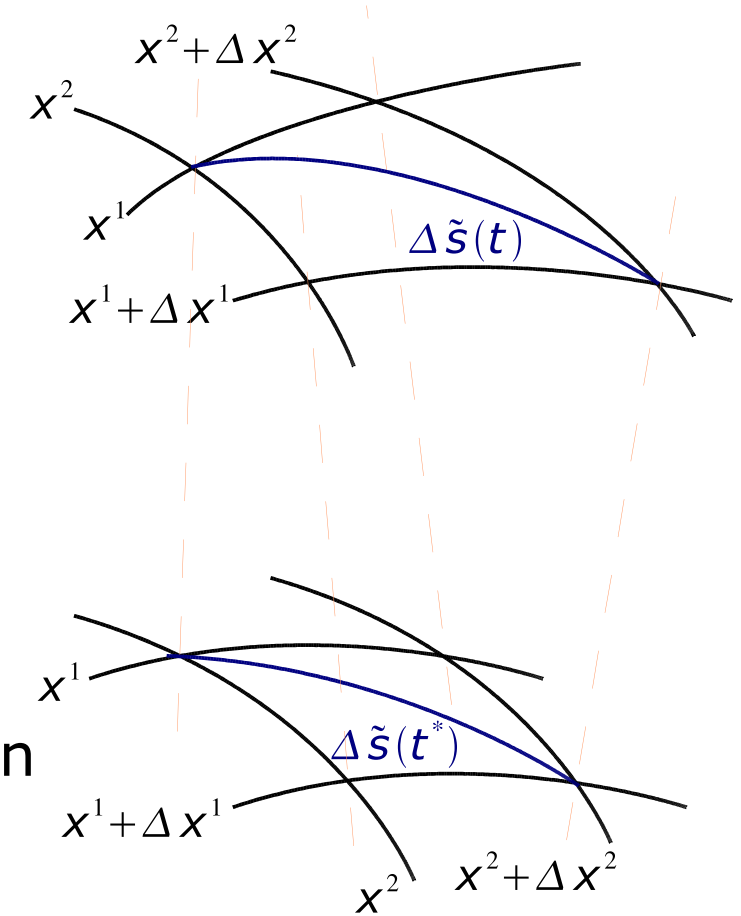
$$ds^2=dt^2-\tilde{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

$\tilde{g}_{\alpha\beta}$ positiv definite (3x3)-Matrix



Skalenfaktor I

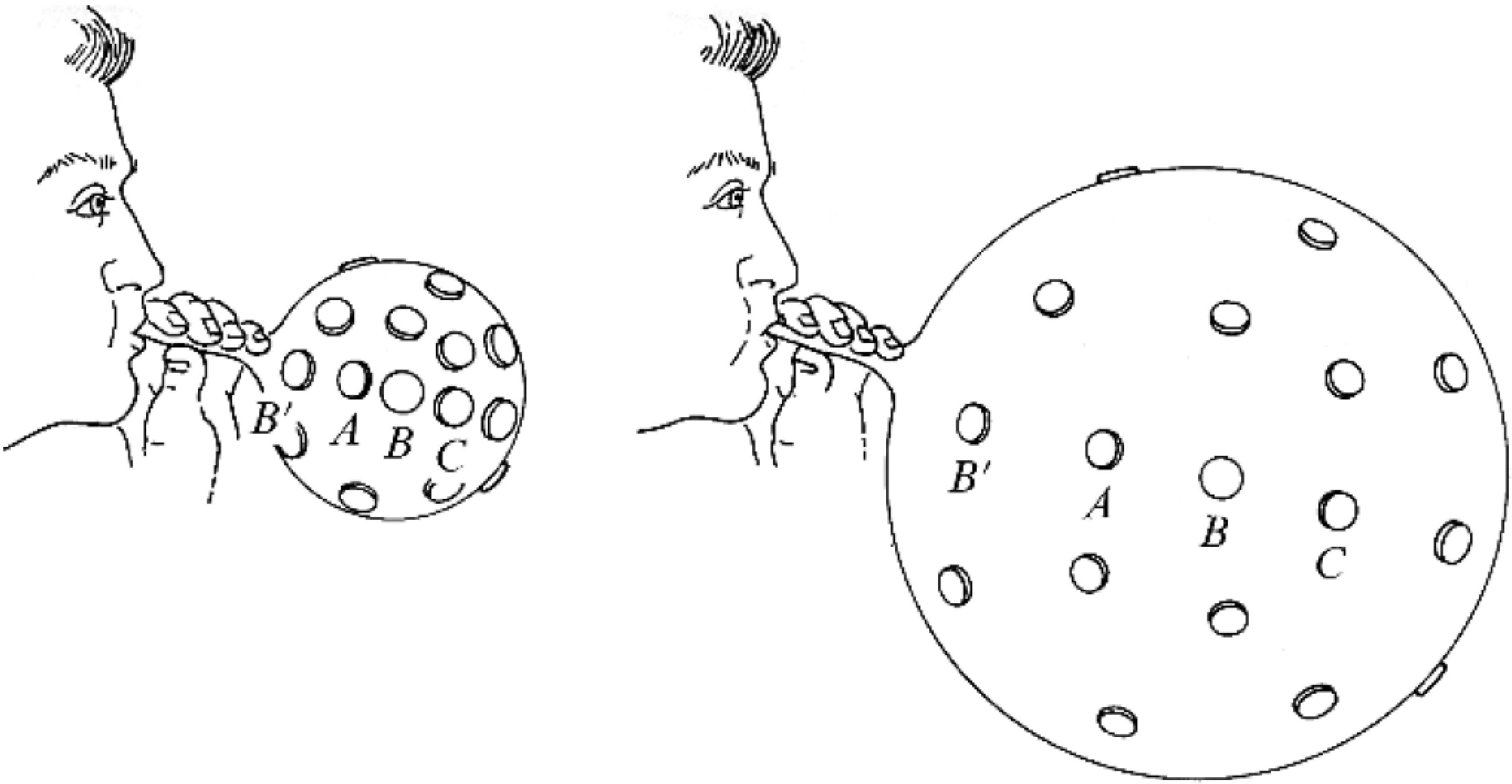
- Betrachte die zeitliche Entwicklung des Raumanteils der Metrik $d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta}(t, x^\gamma)\, dx^\alpha dx^\beta$
  - Eigenentfernung benachbarter Weltlinien (x^1,x^2,x^3) und $(x^1+\Delta x^1,x^2+\Delta x^2,x^3+\Delta x^3)$ auf beliebiger Hyperfläche mit $t=t^*$ $\Delta\tilde{s}(t^*) = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta}(t^*, x^\gamma)\, \Delta x^\alpha \Delta x^\beta}$
  - Eigenentfernung auf Hyperfläche $t=t$ dann $\Delta\tilde{s}(t)$
  - Verhältnis $a(t) = \Delta\tilde{s}(t)/\Delta\tilde{s}(t^*)$ unabh. von
    - „Richtung“ zwischen den Punkten (Isotropie)
    - Ausgangsposition (Homogenität)



- Zeitabhängigkeit der 3-Metrik steckt allein im Skalenfaktor *a(t)*

$$d\tilde{s}^2 = a^2(t)\cdot\tilde{g}_{\alpha\beta}(x^\gamma)\, dx^\alpha dx^\beta$$

Skalenfaktor II



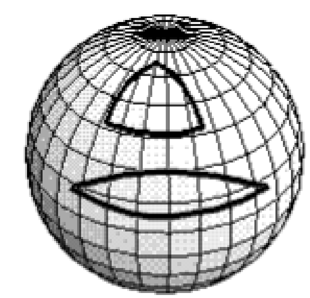
Misner, Thorne, Wheeler

Robertson-Walker-Metrik

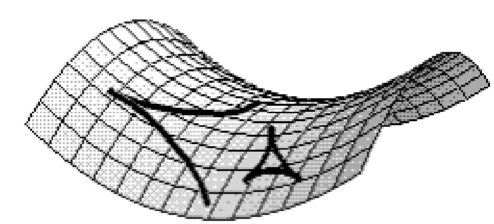
- Forderung nach Homogenität und Isotropie schränkt die 3-Metrik des Raumanteils weiter ein $\Rightarrow$ insbesondere sphärische Symmetrie
- Linienelement der Raum-Zeit

  $$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \cdot \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right]$$

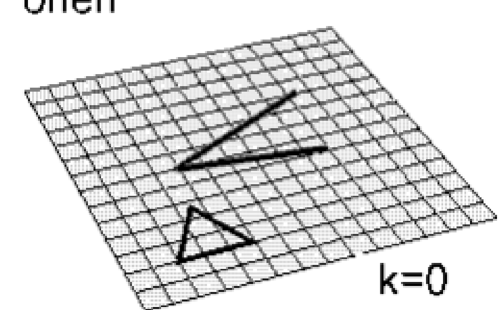
  Robertson-Walker-Metrik (RWM)
- r,θ,ϕ sind die mitbewegten Koordinaten
- $k \in \{-1,0,1\}$ legt die Krümmung der Hyperfläche fest
  - $k = 0$: ebene euklidische Geometrie
  - $k = 1$: geschlossener Fall
  - $k = -1$: offener Fall



k=1
geschlossen



k=-1
offen



k=0
flach

Strobel

Gliederung

- Einführung
- Grundlagen
- Kinematik
  - Lichtausbreitung
  - Rotverschiebung
  - Relativistisches Hubble-Gesetz
- Dynamik

Lichtausbreitung

- ART: Photonen propagieren entlang Nullgeodäten $ds^2=0$

$$0=dt^2-a^2(t)\cdot\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2(\theta)d\phi^2)\right]$$

- Isotropie $\Rightarrow$ Einschränkung auf radiale Bewegung $d\theta=d\phi=0$

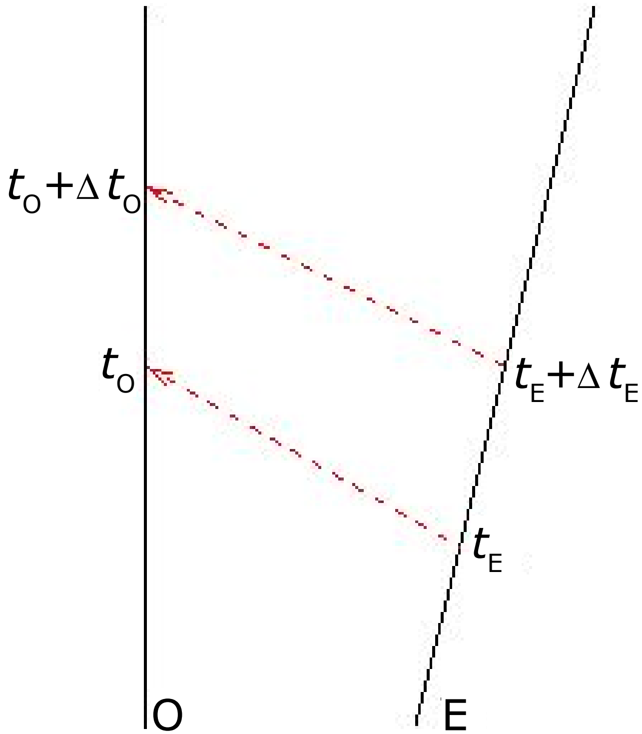
$$\frac{dt}{a(t)}=\frac{\pm dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

- Lichtausbreitung
  - Galaxie E (Weltlinie r_E) sendet zu $t=t_E$ Photon
  - Beobachter O (Weltlinie $r_O=0$) empfängt es zu $t=t_O$

$$\int_{t_E}^{t_O}\frac{dt}{a(t)}=-\int_{r_E}^{r_O}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}=\int_0^{r_E}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}=f_k(r_E)$$

  - Analog für einen späteren Zeitpunkt

$$\int_{t_E+\Delta t_E}^{t_O+\Delta t_O}\frac{dt}{a(t)}=\int_0^{r_E}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}=f_k(r_E)$$



Also: $0=\int_{t_O}^{t_O+\Delta t_O}\frac{dt}{a(t)}-\int_{t_E}^{t_E+\Delta t_E}\frac{dt}{a(t)}$

Rotverschiebung

- Für ausreichend kleine Δt_O und Δt_E gilt dann

$$0=\frac{\Delta t_O}{a(t_O)}-\frac{\Delta t_E}{a(t_E)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta t_O}{\Delta t_E}=\frac{a(t_O)}{a(t_E)}$$

- Falls $\nu_O=1/\Delta t_O$ und $\nu_E=1/\Delta t_E$ folgt also

$$\frac{\nu_E}{\nu_O}=\frac{\lambda_O}{\lambda_E}=\frac{a(t_O)}{a(t_E)}$$

- Rotverschiebung $z=\frac{\lambda_O-\lambda_E}{\lambda_E}=\frac{\lambda_O}{\lambda_E}-1$

$$1+z=\frac{a(t_O)}{a(t_E)}$$

- Kosmologische Rotverschiebung beruht allein auf der Ausdehnung des Raums!

Relativistisches Hubble-Gesetz

- Experimentelle Evidenz: $v=z=H_0D$ (klass. Hubble-Gesetz)
- Betrachte wie beim Skalenfaktor den Eigenabstand zwischen zwei Weltlinien zu verschiedenen Zeiten

$$D(t)=a(t)\cdot d$$
$$D(t+\Delta t)=a(t+\Delta t)\cdot d$$

- Differenzenquotient von $D(t)$

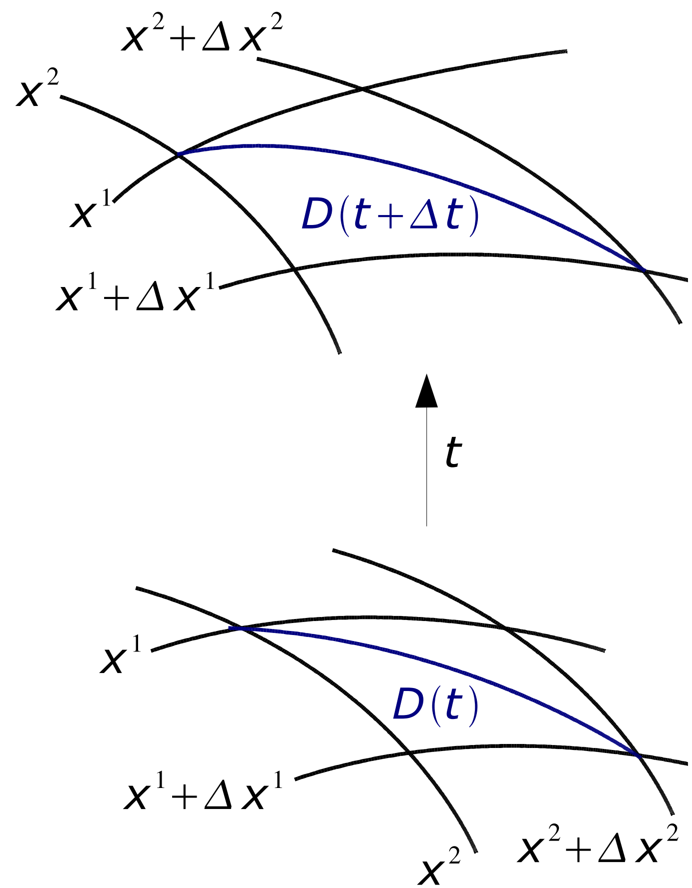
$$\frac{\Delta D}{\Delta t}=\frac{a(t+\Delta t)\cdot d-a(t)\cdot d}{\Delta t}$$

- Grenzübergang $\Delta t\rightarrow 0$ liefert v

$$v=\frac{dD}{dt}=\dot{a}(t)d=\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}D(t)=H(t)D(t)$$

relativistisches Hubble-Gesetz mit Hubble-Funktion $H(t)=\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$

- Identifiziere Hubble-Konstante $H_0=H(t_0)$.



Gliederung

- Einführung
- Grundlagen
- Kinematik
- Dynamik
  - Friedmann-Gleichung im Rahmen der ART
  - Friedmann-Gleichung im Rahmen der Newtonschen Gravitation

Friedmann-Gleichung im Rahmen der ART

- Lösung der Einsteinschen-Feldgleichungen: $G_{ab} - \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}$
  - KP vereinfacht die Metrik und damit auch den Einstein-Tensor
  - T_{ab} hat die Form einer idealen Flüssigkeit.
- Exakte Rechnung liefert Friedmann-Gleichungen

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \cdot a^2 + \frac{\Lambda}{3} a^2 - k \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} \cdot (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

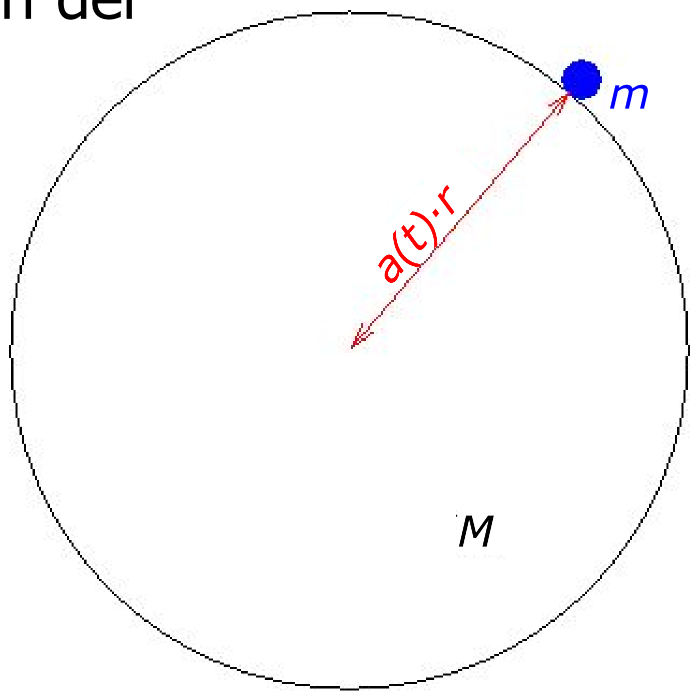
  - $k \in \{-1,0,1\}$ Krümmung
  - ρ Energiedichte von Materie und Strahlung
  - p Druck von Materie und Strahlung
  - Λ kosmologische Konstante $\Rightarrow$ Vakuumenergie
- Zeitliche Entwicklung der Hubble-Funktion

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2(t)}$$

„Friedmann via Newton"

- Newton: Grenzfall der ART für kleine Massen und Skalen
- KP $\Rightarrow$ Skaleninvarianz $\Rightarrow$ Newton auf große Skalen übertragbar
- Expandierende Kugel mit Radius $R(t) = a(t) \cdot r$ und Masse $M = \frac{4\pi}{3} \rho(t) \cdot [a(t) \cdot r]^3$
- Gravitationskraft auf Galaxie (Masse m) an der Kugeloberfläche $m \frac{d^2[a(t) \cdot r]}{dt^2} = \frac{-GMm}{[a(t) \cdot r]^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{-4\pi G}{3} \rho(t)$$



- Multiplikation mit $\dot{a}(t)$ und Integration liefert die Energiegleichung

$$\dot{a}^2(t) = \frac{-8\pi G}{3} \rho(t) \cdot a^2(t) + const.$$

Literatur

M. Camenzind: *From Big Bang to Black Holes* (http://www.lsw.uni-heidelberg.de/users/mcamenzi/)

R. d'Inverno: *Einführung in die Relativitätstheorie* (VCH, 1995)

L.D. Landau, E.M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. II - Klassische Feldtheorie* (Verlag Harri Deutsch 1997)

C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler: *Gravitation* (Freeman 1973)

T. Padmanabhan: *Theoretical Astrophysics, Vol. III - Galaxies and Cosmology* (Cambridge University Press 2002)

A. Unsöld, B. Baschek: *Der neue Kosmos* (Springer 2002)

2dF Galaxy Redshift Survey, http://magnum.anu.edu.au/~TDFgg/

ROSAT (MPE), http://wave.xray.mpe.mpg.de/rosat/survey

N. Strobel, http://www.astronomynotes.com/

NASA/WMAP Science Team, http://map.gsfc.nasa.gov/