Kompaktseminar:
Das frühe Universum

Ausarbeitung zum Vortrag
Weltmodelle II

OLIVER BURGER
Mathematisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik
Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Wintersemester 2003/04

Betreuer: Jörn Wilms

Inhaltsverzeichnis

II Lösung der Friedmann-Gleichungen **1**

§ 1 Die kritische Dichte **1**

§ 2 Die Zustandsgleichungen **2**

§ 3 Materie-dominierte Universen **3**
(3.1) Ein Universum mit $\mathbf{k = 0}$ 3
(3.2) Ein Universum mit $\mathbf{k = +1}$ 4
(3.3) Ein Universum mit $\mathbf{k = -1}$ 6
(3.4) Zusammenfassung 7

§ 4 Die Vakuumenergie **8**

§ 5 Friedmann mit $\mathbf{\Lambda \neq 0}$ **8**
(5.1) $\mathbf{\Omega_\Lambda > 1}$ 10
(5.2) $\mathbf{\Omega_\Lambda < 1}$ 11

§ 6 Literatur **13**

Teil II

Lösung der Friedmann-Gleichungen

Im folgenden sollen die Friedmann-Gleichungen unter Berücksichtigung der Parameter k und Λ gelöst werden. Dazu führen wir noch einige weiter Abkürzungen ein.

§ 1 Die kritische Dichte

Lösen wir nun für den Fall $\Lambda = 0$ die zeitliche Entwicklung der Hubble-Funktion nach k auf:

$$k = \frac{R^2}{c}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho - H^2\right)$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, daß k nur von der Dichte ρ abhängt. Wir definieren nun

$$\rho_c := \frac{3H^2}{8\pi G} \qquad \text{und} \qquad \Omega := \frac{\rho}{\rho_c}$$

wobei wir ρ_c als die kritische Dichte bezeichnen, also den Wert von ρ für den der Faktor k den Wert 0 annehmen würde. Wie nun einfach zu sehen ist, ergibt sich daraus der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
\Omega > 1 &\iff k > 0 \text{ das Universum ist geschlossen}\\
\Omega = 1 &\iff k = 0 \text{ das Universum ist flach}\\
\Omega < 1 &\iff k < 0 \text{ das Universum ist offen}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, daß für $\Omega \leq 1$ das Universum bis ins Unendliche expandieren wird, während es für $\Omega > 1$ in einem „Big Crunch" in sich zusammenstürzen wird.
Der momentan gültige Wert für ρ_c liegt bei $\rho_c \approx 1,67 \cdot 10^{-24} g/cm^3$ Der gemessene Wert für Ω liegt zwischen $\Omega = 0,1$ und $\Omega = 0,3$.
Es ist allerdings zu beachten, daß Λ dies beeinflussen kann.
Ω hat Auswirkungen 2. Ordnung auf die Expansion des Universums.
Wir betrachten nun die Friedmann-Gleichung, umgeschrieben als

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho = -\frac{4\pi G}{3}\Omega\frac{3H^2}{8\pi G} = -\frac{\Omega H^2}{2}$$

sowie die Taylorentwicklung von $R(t)$ um den Anfangszeitpunkt $t = t_0$:

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} = \frac{R(t_0)}{R(t_0)} + \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)}(t - t_0)^2$$

Da nun aber $H(t) = \dot{R}/R$ gilt, folgt daraus nun:

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{2}H_0^2(t - t_0^2)$$

wobei $H_0 = H(t_0)$ und $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ gilt. Hierbei wird der Index 0 bei Ω oft weggelassen.
Wobei man hier auch oft den Bremsparameter

$$q := \frac{\Omega}{2} = -\frac{\ddot{R}(t_0)R(t_0)}{\dot{R}^2(t_0)} = \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)H^2(t)}$$

einsetzt.

§ 2 Die Zustandsgleichungen

Für die Entwicklung des Universums müssen wir nun drei verschiedene Typen von Zustandsgleichungen betrachten.

(i) Materie: Normale Materie wird durch die Expansion des Universums in seine drei Raumrichtungen ausgedünnt, es gilt also:

$$\rho_m \propto R^{-3}$$

Die Materie wird von Kosmologen oft auch als Staub bezeichnet.

(ii) Strahlung: Die Energiedichte der Strahlung nimmt sowohl wegen der Expansion als auch wegen der kosmologischen Rotverschiebung ab: Es folgt also

$$\rho_r \propto R^{-4}$$

(iii) Vakuum: Die Vakuumenergiedichte ($= \Lambda$) ist unabhängig von R, also gilt:

$$\rho_v = const$$

Wenn man diese Zustandsgleichungen nun in die Friedmann-Gleichungen einsetzt, erhält man unter Berücksichtigung der Randbedingung $R(t = 0) = 0$ jeweils ein anderes Weltmodell.

Der jeweilige Skalenfaktor wird dann durch H_0 und ω_0 bestimmt:
Die Friedmann-Gleichung für $t = t_0$ lautet dann:

$$\dot{R}_0^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho R_0^2 = -k$$

Setzt man nun Ω_0 und $H_0 = \dot{R}_0/R_0$ ein, erhält man

$$H_0^2 R_0^2 - H_0^2 \Omega_0 R_0^2 = -k$$

und damit

$$R_0 = \frac{c}{H_0}\left(\frac{k}{\Omega - 1}\right)^{1/2}$$

Wie man hierraus sieht, folgt nun:
Für $\Omega \rightarrow 0$ gilt $R_0 \rightarrow c/H_0$, die sogenannte Hubble-Länge
Für $\Omega = 1$ dagegen ist R_0 beliebig.
Damit haben wir dann alles Notwendige, um die Friedmann-Gleichung für die jeweiligen Fälle zu lösen und die Entwicklung des Universums zu verstehen.
Wir betrachten jetzt also die drei Fälle:
$k = 0, +1, -1$

§ 3 Materie-dominierte Universen

(3.1) Ein Universum mit k = 0

Für den Materie-dominierten, flachen Fall, den sogenannten Einstein-de Sitter-Fall, lautet die Friedmann-Gleichung wie folgt:

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 R_0^3}{R^3}R^2 = 0$$

Für $k = 0$ gilt nun $\Omega_0 = 1$ und

$$\frac{8\pi G}{3} = \Omega_0 H_0^2 R_0^3 = H_0^2 R_0^3$$

Damit lautet die Friedmann-Gleichung dann:

$$\dot{R}^2 - \frac{H_0^2 R_0^3}{R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dR}{dt} = H_0 R_0^{3/2} R^{-1/2}$$

Um dies zu lösen, wendet man nun die Separation der Variablen an und setzt R(0)=0:

$$\int_0^{R(t)} R^{1/2} dR = H_0 R_0^{3/2} t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3} R^{3/2}(t) = H_0 R_0^{3/2} t$$

Somit gilt also:

$$R(t) = R_0 \left(\frac{3H_0}{2} t \right)^{2/3}$$

Für $k = 0$ expandiert das Universum also bis ins Unendliche, sein momentanes Alter ($R(t_0) = R_0$) wird gegeben durch

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}$$

Als Erinnerung: Die Hubble-Zeit beträgt $H_0^- = 9,78 Gyr/h$.

(3.2) Ein Universum mit $\mathbf{k = +1}$

Für den Materie-dominierten, geschlossenen Fall lautet die Friedmann-Gleichung:

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 R_0^3}{R} = -c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{R}^2 - \frac{H_0^2 R_0^3 \Omega_0}{R} = -c^2$$

Wenn man nun das R_0 aus den Zustandsgleichungen einsetzt, erhält man:

$$\dot{R}^2 - \frac{H0^2 c^3 \Omega_0}{H_0^3 (\Omega_0 - 1)^{3/2}} \frac{1}{R} = -c^2$$

was sich äquivalent als

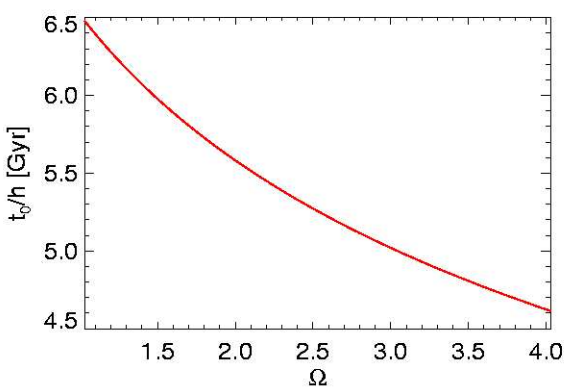
$$\frac{dR}{dt} = c \left(\frac{\xi}{R} - 1 \right)^{1/2} \qquad \text{mit } \xi = \frac{c}{H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

schreiben läßt.
Mit der Randbedingung $R(0) = 0$ ergibt eine Separation der Variablen:

$$ct = \int_0^{R(t)} \frac{dR}{(\xi/R - 1)^{1/2}} = \int_0^{R(t)} \frac{R^{1/2} dR}{(\xi - R)^{1/2}}$$

Mithilfe von Integration durch Substitution ergibt sich daraus:

$$\text{mit } R = \xi \sin^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{\xi}{2}(1 - \cos\Theta) \quad \Longrightarrow \quad ct = \frac{\xi}{2}(\Theta - \sin\Theta)$$



Das Alter des Universums t_0 kann dann gewonnen werden, indem man folgende Gleichung löst:

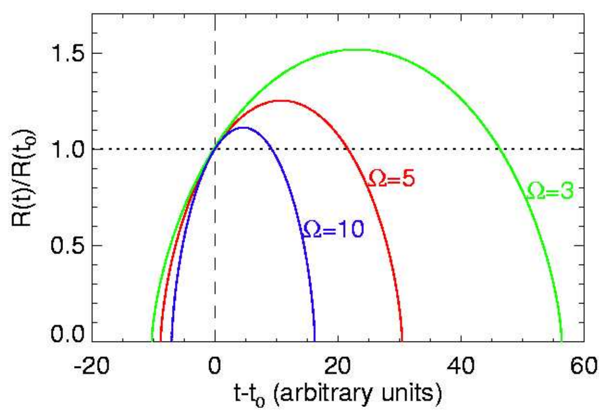
$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{c}{H_0(\Omega_0 - 1)^{1/2}} \\ &= \frac{\xi}{2}(1 - \cos\Theta_0) \\ &= \frac{1}{2}\frac{c}{H_0}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}(1 - \cos\Theta_0) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\cos\Theta_0 = \frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin\Theta_0 = \frac{2}{\Omega_0}(\Omega_0 - 1)^{1/2}$$

Wenn man diese Ergebnisse nun in die Gleichung für ct einsetzt, erhält man:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}\left[\arccos\left(\frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0}\right) - \frac{2}{\Omega_0}(\Omega_0 - 1)^{1/2}\right]$$



Da R einer zyklischen Funktion gehorcht, ergibt sich hieraus auch, daß ein geschlossenes Universum eine begrenzte Lebenszeit hat.
Die maximale Expansion wird erreicht bei $\Theta = \pi$ mit einem maximalen Skalenfaktor von

$$R_{max} = \xi = \frac{c}{H_0}\frac{\Omega_0}{H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

Nach dem Zusammenfallen zum „Big Crunch“ zum Zeitpunkt $\Theta = 2\pi$ beträgt die Lebenszeit des geschlossenen Universums

$$t = \frac{\pi}{H_0}\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

(3.3) Ein Universum mit $\mathbf{k} = -\mathbf{1}$

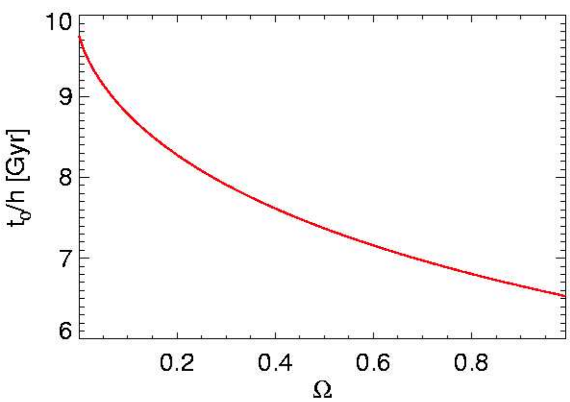
Schließlich noch der Materie-dominierte, offene Fall. Dieser Fall ist sehr ähnlich zum „$k = +1$"-Fall: Für $k = -1$ ergibt sich für die Friedmann-Gleichung:

$$\frac{dR}{dt} = c\left(\frac{\zeta}{R} + 1\right)^{1/2} \qquad \text{mit } \zeta = \frac{c}{H_0}\frac{\Omega_0}{(1-\Omega_0)^{3/2}}$$

Nach der Separation der Variablen erhält man hier mit einigem Rechnen:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\zeta}{2}(\cosh\Theta - 1) \\ ct = &= \frac{\zeta}{2}(\sinh\Theta - 1) \end{aligned}$$

wobei die Integration wieder mittels Substitution durchgeführt wurde.



Um das derzeitige Alter des Universums in diesem Fall zu erhalten, ist zu beachten, daß hier

$$\cosh\Theta_0 = \frac{2-\Omega_0}{\Omega_0} \qquad \text{und}$$

$$\sinh\Theta_0 = \frac{2}{\Omega_0}(1-\Omega_0)^{1/2}$$

gilt mit einer identischen Herleitung wie im Fall $k = +1$, so daß hier also gilt:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}\frac{\Omega_0}{(1-\Omega_0})^{3/2} \cdot \left[\frac{2}{\Omega_0}(1-\Omega_0)^{1/2} - \log\left(\frac{2-\Omega_0+2(1-\Omega_0)^{1/2}}{\Omega_0}\right)\right]$$

(3.4) Zusammenfassung

Man kann die Ergebnisse im Materie-dominierten Fall nun umschreiben, indem man die Funktionen S_k und C_k benutzt

$$\begin{aligned} R &= k\mathcal{R}(1 - C_k(\Theta)) \\ ct &= k\mathcal{R}(\Theta - S_k(\Theta)) \end{aligned}$$

wobei

$$S_k(\Theta) = \begin{cases} \sin\Theta \\ \Theta \\ \sinh\Theta \end{cases} \quad \text{und} \quad C_k = \begin{cases} \cos\Theta & \text{wenn } k = +1 \\ 1 & \text{wenn } k = 0 \\ \cosh\Theta & \text{wenn } k = -1 \end{cases}$$

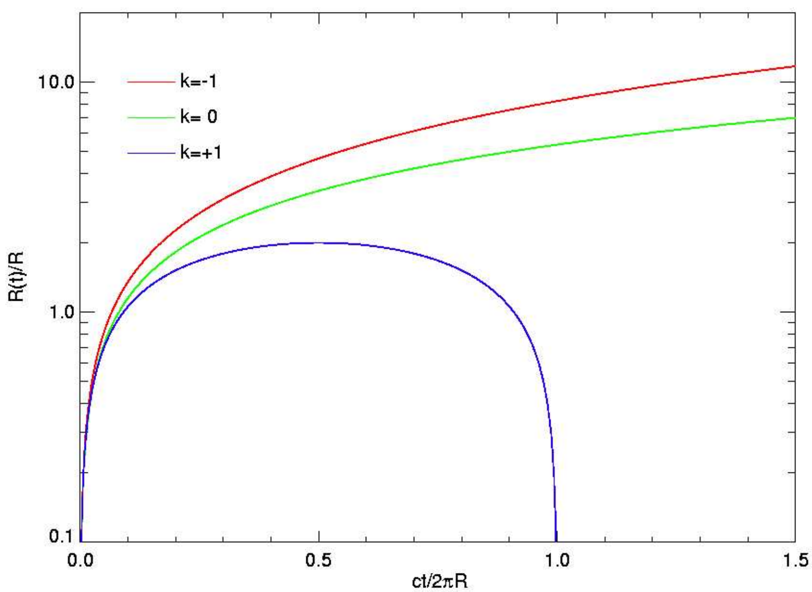
Die obigen Gleichungen werden die Cycloiden Gleichungen genannt. Der charakteristische Radius $\mathcal{R}$ wird gegeben durch

$$\mathcal{R} = \frac{c}{H_0}\frac{\Omega_0}{2(k(\Omega_0 - 1))^{3/2}} \qquad \text{vg l. Peacock, 1999}$$

Desweiteren ist zu beachten:

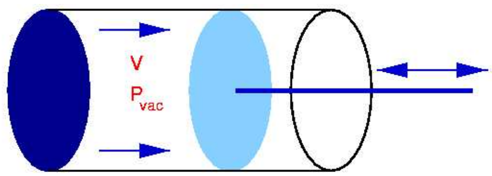
1.) Die Cycloiden Gleichungen konnen auch als das Resultat einer Newton'schen Kollapses oder einer Newton'schen Expansion einer sphärischen Massenverteilung erhalten werden.

2.) Θ wird auch der Entwicklungswinkel genannt, es kann gezeigt werden, daß er mit der „konformen Zeit“ übereinstimmt.



§ 4 Die Vakuumenergie

Da in den Zustandsgleichungen auch eine Vakuumenergiedichte auftaucht, müssen wir uns nun, nach der Lösung der Friedmann-Gleichungen für den Materie-dominierten Fall, Gedanken darüber machen, was Vakuum ist.
Dazu muß man sich klar machen, daß Vakuum nicht einfach nur leerer Raum ist, sondern der Grundzustand einer physikalischen Theorie
(vgl. dazu „Reviews: Caroll, Press & Turner (1992), Caroll (2000)).
Da ein Grundzustand in jedem Koordinatensystem der gleiche sein sollte folgt, daß Vakuum Lorentz-invariant ist



Nach Peacock, 1999, Fig 1.3

Die Zustandsgleichung lautet dann (nach Zeldovich, 1968):

$$P_{vac} = -\rho_{vac} c^2$$

Dies folgt direkt aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik: ρ_{vac} muß beim Kompression oder Expansion konstant bleiben. Dies gilt nur für diese Zustandsgleichung:

$$dE = dU + PdV = \rho_{vac} c^2 dV - \rho_{vac} c^2 dV = 0$$

Die Vakuumenergiedichte ρ_{vac} definiert nun Einsteins KosmologischeKonstante

$$\Lambda = 8\pi G \rho_{vac}$$

Wenn man nun ρ_{vac} zur Friedmann-Gleichungen hinzufügt, kann man

$$\Omega_\Lambda := \frac{8\pi G \rho_{vac}}{3H^2} = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

definieren.

§ 5 Friedmann mit $\Lambda \neq 0$

Die Friedmann-Gleichung mit $\Lambda \neq 0$ lautet (nach Reviews: Caroll, Press & Turner (1992), Caroll (2000)) wie folgt:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Nun definieren wir die Ωs:

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{8\pi G\rho_m}{3H_0^2}\\ \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H_0^2}\\ \Omega_k &= -\frac{k}{R_0^2H_0^2}\end{aligned}$$

Wegen der Friedmann-Gleichung gilt dann:

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = \Omega + \Omega_k = 1$$

Nun ist es einfacher, mit einem dimensionslosen Skalenfaktor zu arbeiten, wir definieren also

$$a = \frac{R(t)}{R_0}$$

Damit lautet die Friedmann-Gleichung dann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_{m,0}}{3a^3} - \frac{k}{a^2R_0^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Da $\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3}$ gilt, folgt nun nach dem Einsetzen der Ωs

$$\left(\frac{\dot{a}}{aH_0}\right)^2 = \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{1-\Omega_m-\Omega_\Lambda}{a^2} + \Omega_\Lambda$$

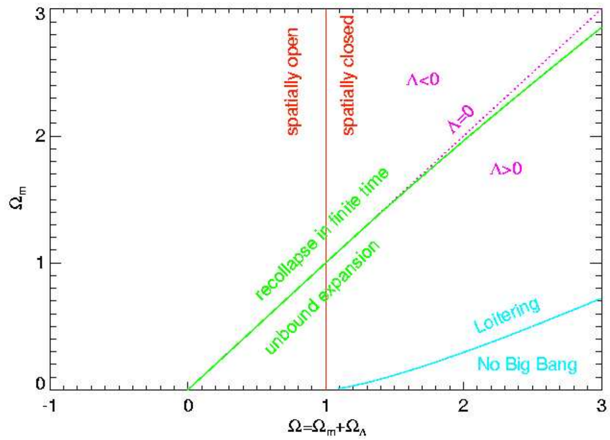
Wenn man nun die Zeiteinheiten durch Einheiten der heutigen Hubblezeit ersetzt

$$\tau = H_0 \cdot t$$

erhält man:

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right) = 1 + \Omega_m\left(\frac{1}{a}-1\right) + \Omega_\Lambda(a^2-1)$$

mit den Randbedingungen $a(\tau = 0) = 1$ und $\frac{da}{d\tau}|_{\tau=0} = 1$. Für die meisten Kombinationen von Ω_m und Ω_Λ muß dies numerisch gelöst werden.

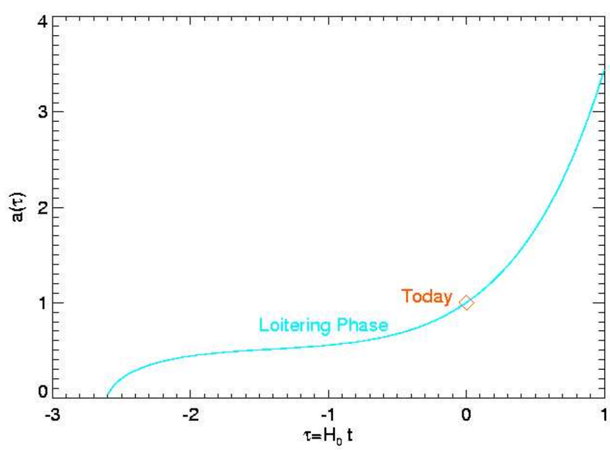


nach Caroll, Press & Turner, 1992, Fig. 1

Mit Λ ist die Entwicklung des Universums komplizierter als ohne:

- unbegrenzte Expansion ist möglich für $\Omega < 1$
- Für große Ω_Λ gibt es keinen „Big Bang"
- Für große Ω_Λ gibt es eine mögliche „Herumlunger-Phase"

(5.1) $\mathbf{\Omega_\Lambda > 1}$



Herumlungerndes Universum mit

$\Omega_m = 0,55,\ \Omega_\Lambda = 2,055$

Für große Ω_Λ erhalten wir eine Kontraktion aus dem Unendlichen und eine Reexpansion, es gibt also keinen „Big Bang".
Für leicht kleinere Ω_Λ existiert in der Vergangenheit eine Phase, in der $\dot{a} \sim 0$ gilt, wir haben ein sogenanntes „Herumlungerndes Universum".

Die Schwelle für die Existenz eines Wendepunktes liegt (nach Caroll, Press & Turner (1992)) dann bei

$$\Omega_\Lambda \geq \Omega_{\Lambda,schwell} = 4\Omega_m \left\{ C_k \left[\frac{1}{3} C_k^- \left(\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m} \right) \right] \right\}$$

wobei $\kappa = sgn(0,5 - \Omega_m)$ und C_k wie zuvor definiert ist.

Quasar mit $z = 5,82$

Für den $\Omega_\Lambda = \Omega_{\Lambda,schwell}$-Wendepunkt z.B. existiert ein minimales a. Und da $1+z = 1/a$ folgt aus der Existenz des Wendepunktes ein maximal mögliches z.

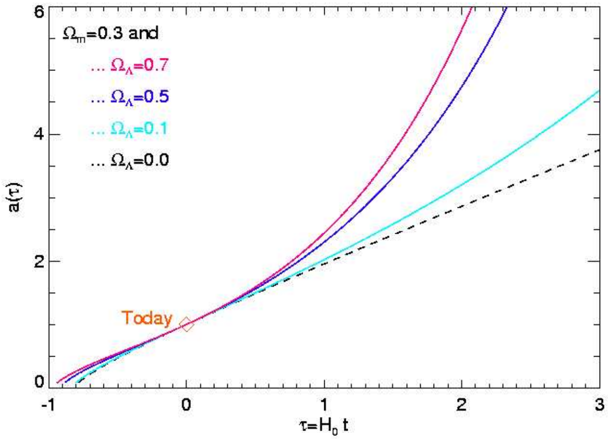
$$z \leq 2C_k \left(\frac{1}{3} C_k^- \left\{ \frac{1-\Omega_m}{\Omega_m} \right\} \right) - 1$$

(Caroll, Press & Turner (1992))
Da nun aber Quasare mit $z = 5,82$ beobachtet wurden, bedeutet dies, daß $\Omega_m < 0,007$ sein muß, was eindeutig nicht mit den Beobachtungen übereinstimmt. Daher muß $\Omega_\Lambda < 1$ sein.

(5.2) $\mathbf{\Omega_\Lambda < 1}$

Für $\Omega_\Lambda < 1$ gibt es zwei Entwicklungsmöglichkeiten:

- Materie-dominiert, ähnlich zu den bisherigen Ergebnissen
- Λ-dominiert, exponentielles Wachstum



Die Altersberechnung ist ähnlich zu der mit $\Omega_\Lambda = 0$, aber meist nur numerisch lösbar.
Als Ergebnis ergibt sich:

$$\boxed{\text{Universen mit } \Omega_\Lambda > 0 \text{ sind älter als solche mit } \Omega_\Lambda = 0.}$$

Die analytische Formel für das Alter ist (nach Caroll, Press & Turner (1992))

$$t = \frac{2\sinh^{-}(((1-\Omega_a)/\Omega_a)^{1/2})}{3H_0(1-\Omega_a)^{1/2}}$$

für $\Omega_a < 1$ wo $\Omega_a = 0,7\Omega_m + 0,3(1-\Omega_\Lambda)$ Für $\Omega_m = 0,3,\ \Omega_\Lambda = 0,7,\ H_0 = 70kms^{-}Mpc^{-}$ ergibt sich nun ein Alter von $t = 13,5Gyr$.

§ 6 Literatur

- J. Wilms: Beobachtende Kosmologie, Skript zur Vorlesung
- Caroll, S.M., 2000, Living Rev. Rel., submitted (astro-ph/0004075)
- Caroll, S.M., Press, W.H. & Turner, E.L., 1992, ARA&A, 50, 499
- Peacock, J.A., 1999, Cosmological Physics, Cambridge University Press

Alle Bilder ohne Angaben stammen von J. Wilms